CH1-3 相似多邊形

1 圖形的縮放

2 相似多邊形

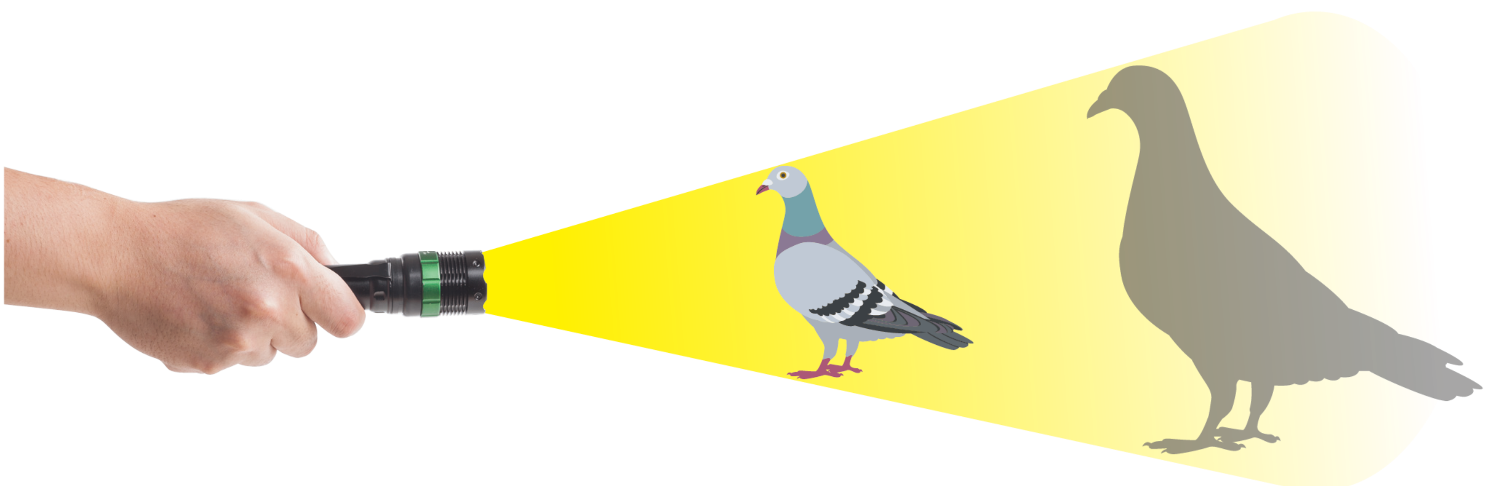
3 三角形的相似性質

重點回顧

自我評量

1 圖形的縮放

每個物件經放大或縮小後，雖然大小和實物不同，但其形狀是相同的。用手電筒(光源)照射動物圖案，會在牆上看到它的影子，兩者的形狀相同，但大小不同。

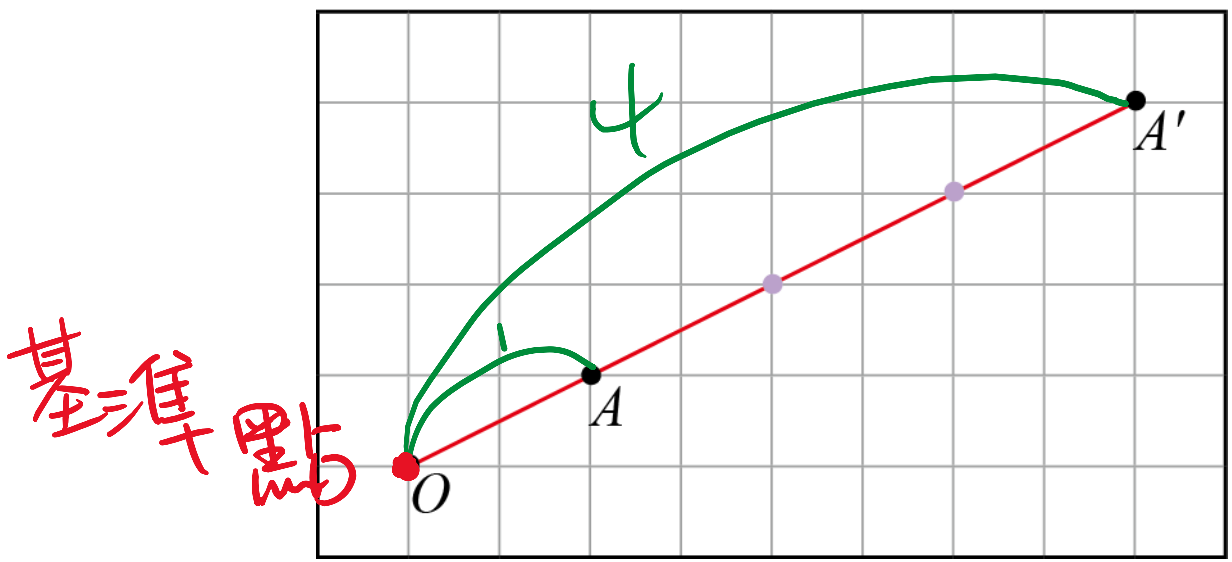


為了說明這個原理，我們先來了解以某固定點為縮放中心，任一點到此固定點距離的縮放關係。

基準點

線段的縮放

在平面上找一點 O，視為光源固定不動，接著任取一點 A，如下圖，在 $\overrightarrow{OA}$ 上取一點 A'，使得 $\overline{OA'}:\overline{OA}=4:1$，即 $\overline{OA'}$ 是 $\overline{OA}$ 的 4 倍。此時就稱 A' 點是以 O 點為縮放中心，將 A 點與 O 點的距離縮放 4 倍所得到的對應點。

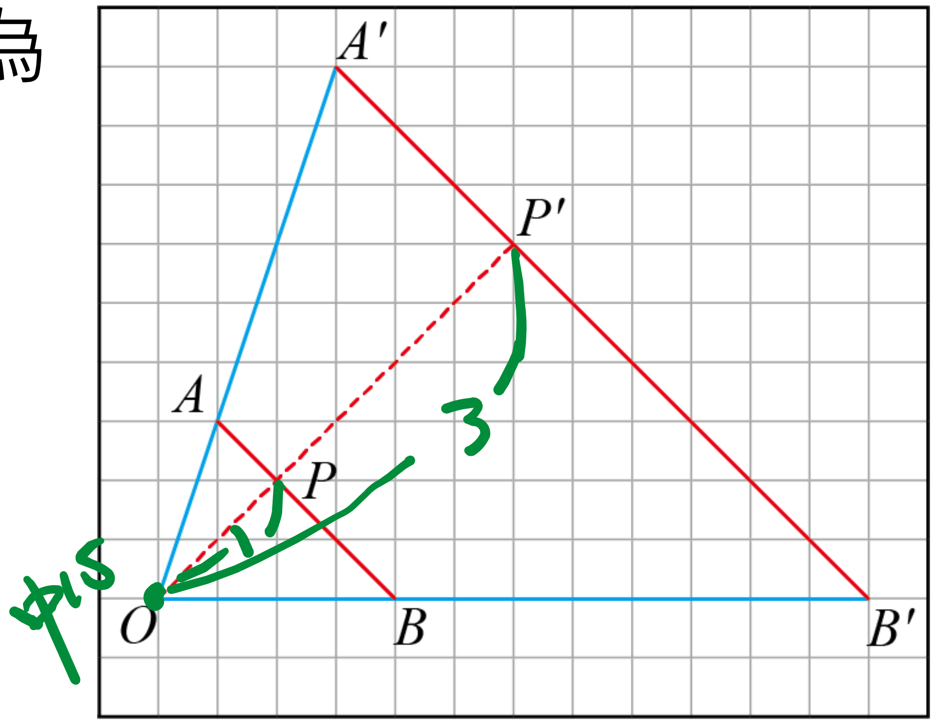


探索活動 線段的縮放

1. 如圖，若 P 為 $\overline{AB}$ 上的任一點，且 P' 點是以 O 點為縮放中心，將 P 點與 O 點的距離縮放 3 倍所得的對應點，則：

(1) $\overline{OP'}$ 的長度是否為 $\overline{OP}$ 的 3 倍？

是。

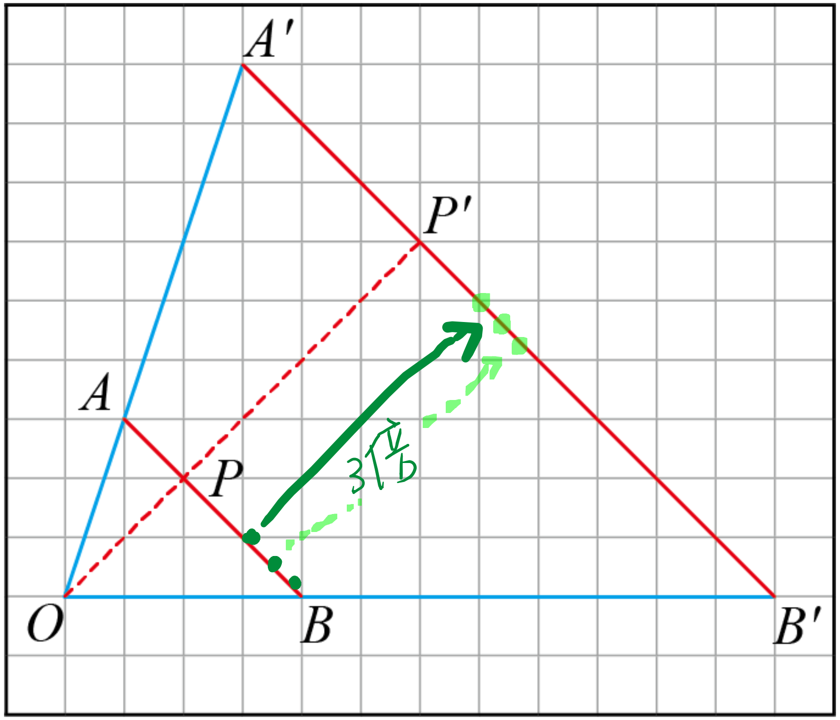


解

探索活動 線段的縮放

1. 如圖，若 P 為 $\overline{AB}$ 上的任一點，且 P' 點是以 O 點為縮放中心，將 P 點與 O 點的距離縮放 3 倍所得的對應點，則：

(2) 以 O 為縮放中心，將 $\overline{AB}$ 上的每一點與 O 點的距離縮放 3 倍後得到的點會在 $\overline{A'B'}$ 上嗎？



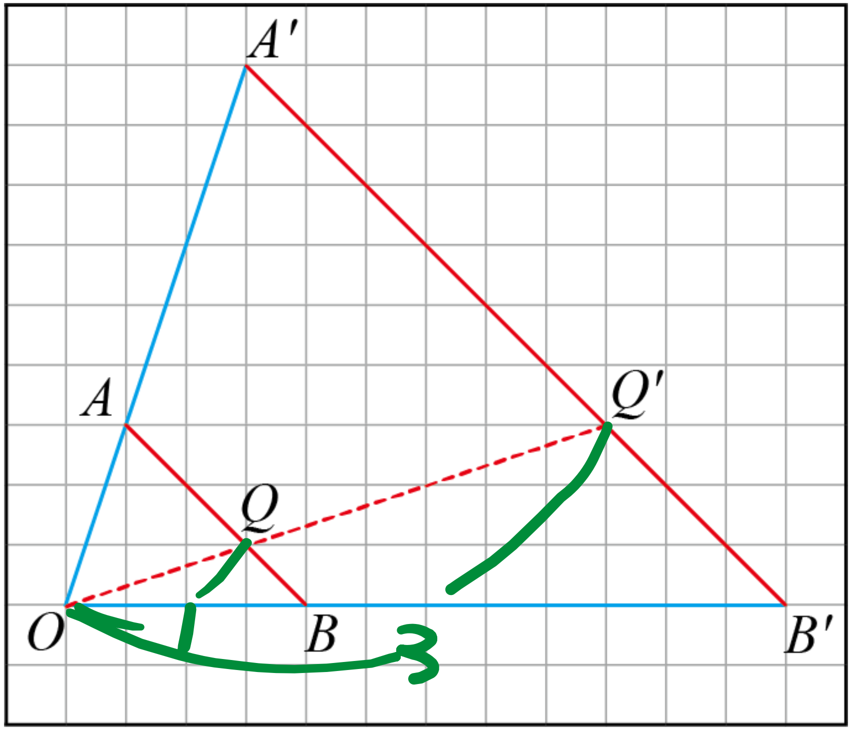
會。

#

解

探索活動 線段的縮放

2. 如圖，若 Q' 為 $\overline{A'B'}$ 上的任一點，連接 $\overline{OQ'}$ 與 $\overline{AB}$ 交於一點 Q，若以 O 點為縮放中心，將 Q 點與 O 點的距離縮放 3 倍所得的對應點是 Q' 嗎？



是。

#

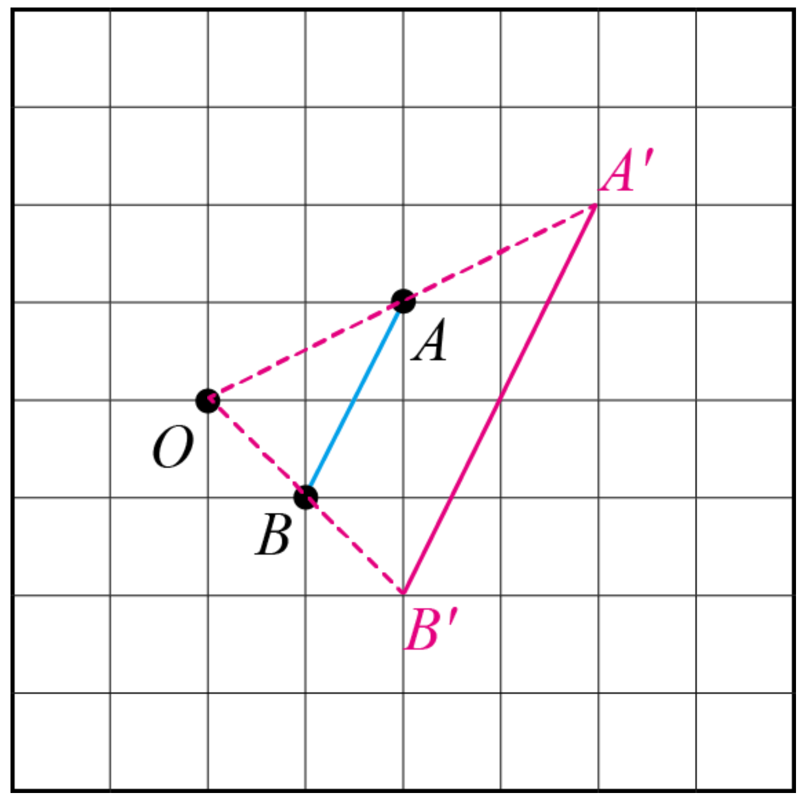
由前頁的 探索活動 可知，以 O 點為縮放中心，將 $\overline{AB}$ 上的點與 O 點的距離縮放 3 倍後的點都會在 $\overline{A'B'}$ 上，且在 $\overline{A'B'}$ 上的任一點 Q'，都可以在 $\overline{AB}$ 上找到一點 Q，使得 Q 點與 O 點的距離縮放 3 倍後的點是 Q'。此時 $\overline{AB}$ 縮放 3 倍後的圖形就是 $\overline{A'B'}$，其中 $\overline{A'B'}=3\overline{AB}$ 且 $\overline{A'B'}\,/\!/\,\overline{AB}$，我們稱 $\overline{A'B'}$ 為 $\overline{AB}$ 的 3 倍縮放圖形。

隨堂練習

1. 如圖，O 點不在 $\overline{AB}$ 上，畫出以 O 點為縮放中心，將 $\overline{AB}$ 縮放 2 倍後的圖形。

$\overline{A'B'}$ 即為所求。

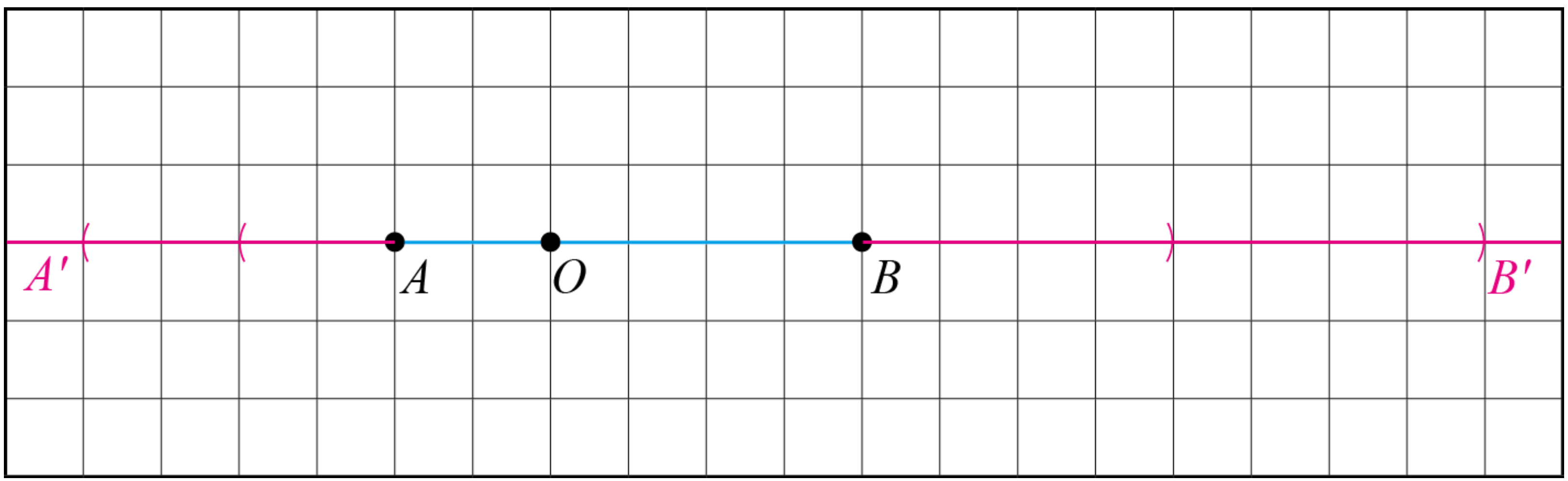
1. 先連 $\overline{OA}$
2. 再延長至 A' 點
3. 連接 $\overline{OB}$
4. 延長至 B'



解

隨堂練習

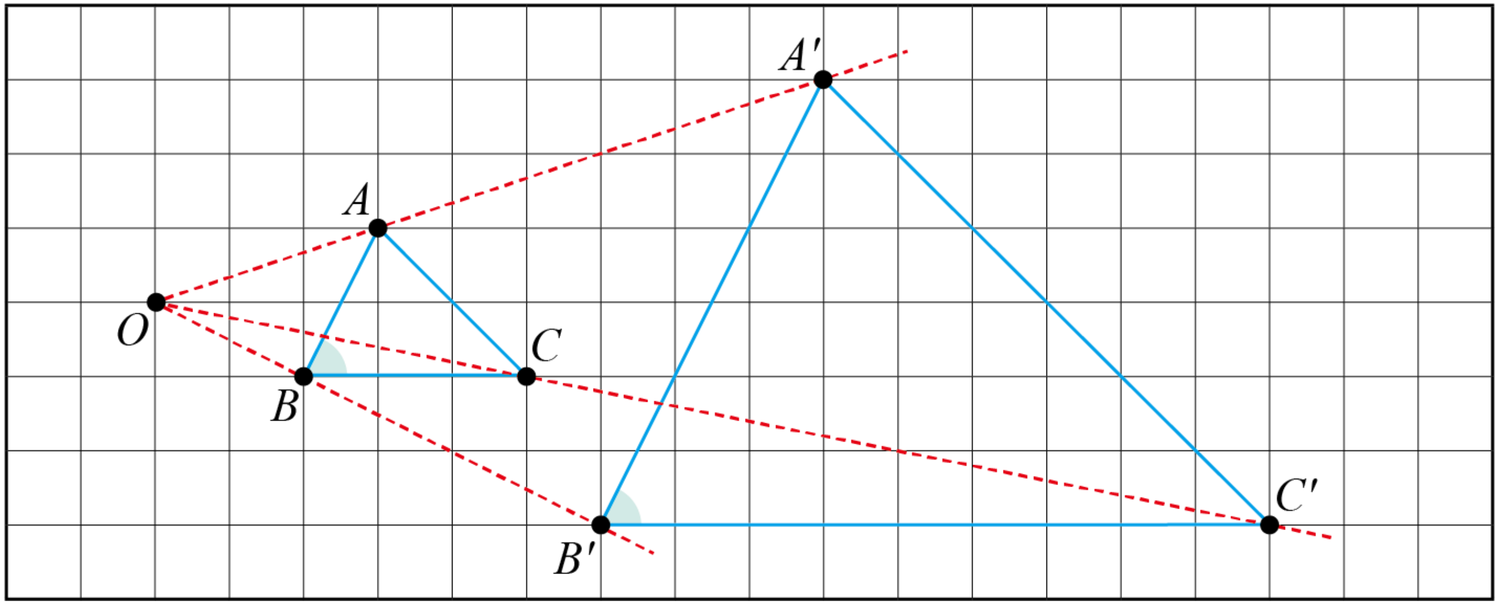
2. 如圖，O 點在 $\overline{AB}$ 上，畫出以 O 點為縮放中心，將 $\overline{AB}$ 縮放 3 倍後的圖形。



$\overline{A'B'}$ 即為所求。

探索活動 三角形的縮放

如圖，已知$\triangle ABC$及外部一點O，以O點為縮放中心，分別將$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$縮放3倍後，得到$\triangle A'B'C'$，則稱$\triangle A'B'C'$是$\triangle ABC$的3倍縮放圖形。

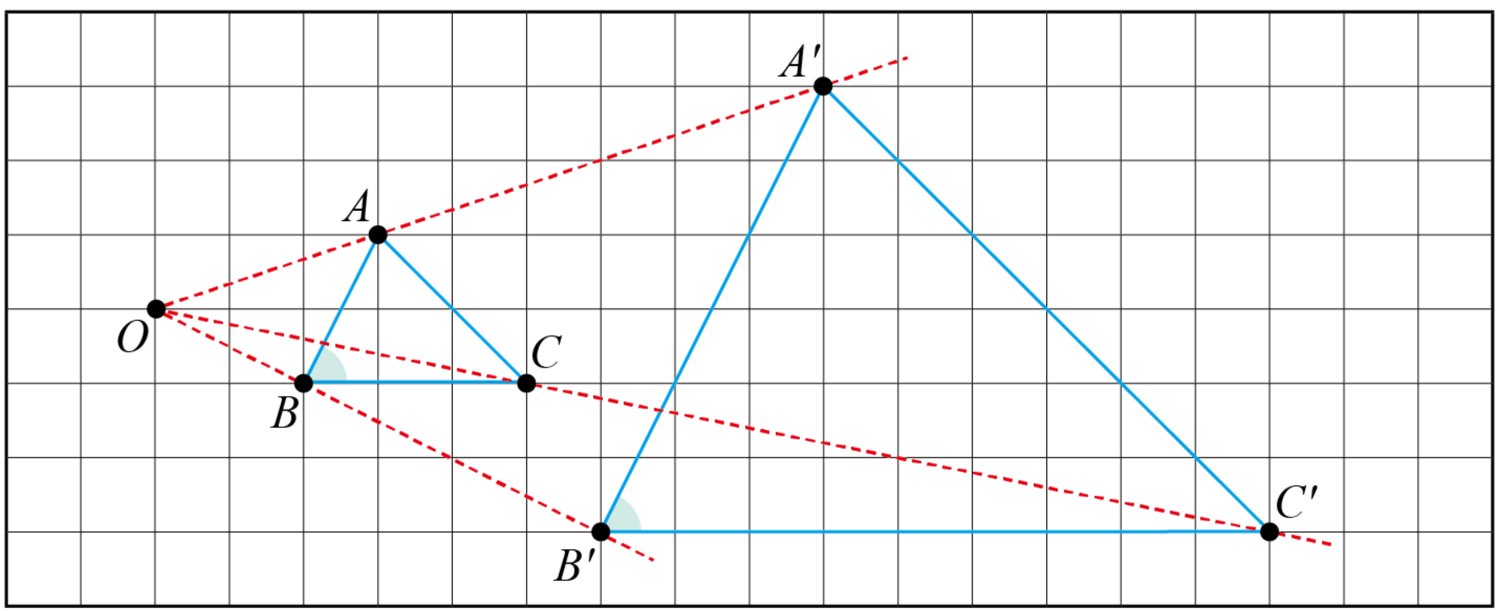


探索活動 三角形的縮放

(1) $\angle OBA$ 與 $\angle OB'A'$ 是否相等？為什麼？

$\because$ 縮放後的線段與原線段平行，即 $\overline{AB} \,/\!/\, \overline{A'B'}$，

$\therefore \angle OBA = \angle OB'A'$（同位角相等）。



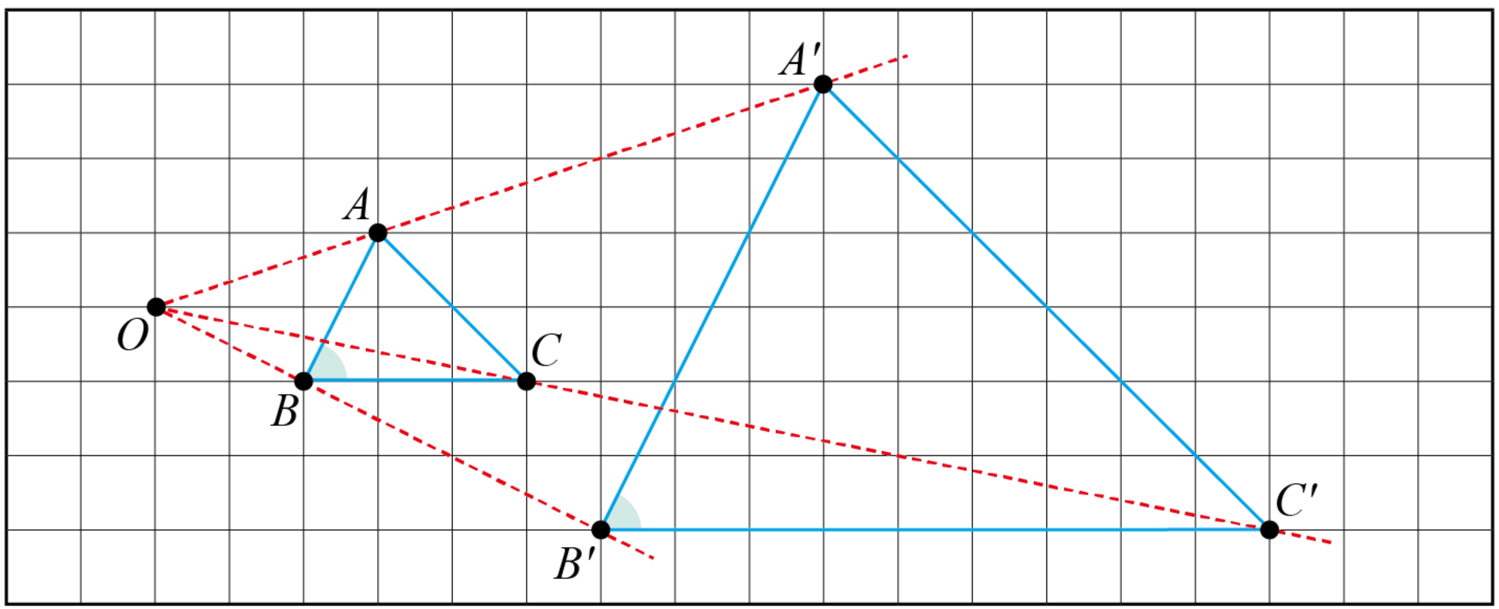
解

探索活動 三角形的縮放

(2) $\angle OBC$ 與 $\angle OB'C'$ 是否相等？為什麼？

$\because$ 縮放後的線段與原線段平行，即 $\overline{BC} \,//\, \overline{B'C'}$，

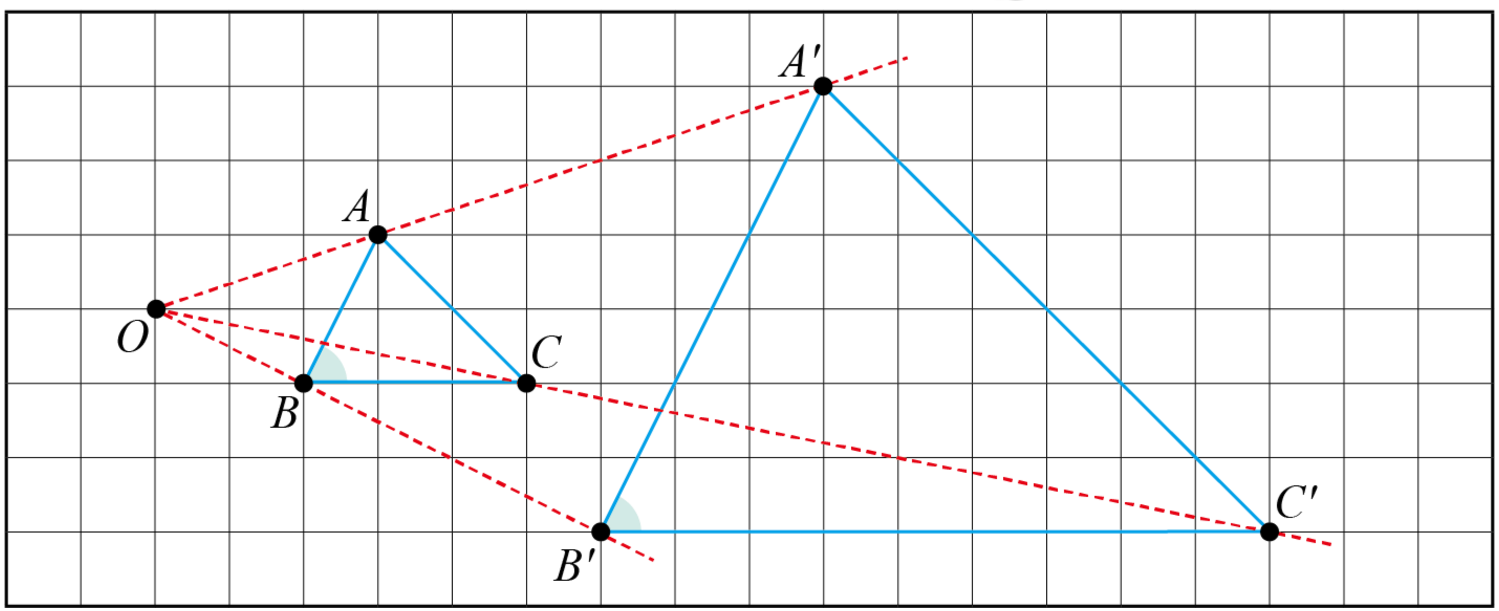
$\therefore \angle OBC = \angle OB'C'$（同位角相等）。



探索活動 三角形的縮放

(3) $\angle ABC$ 與 $\angle A'B'C'$ 是否相等？為什麼？

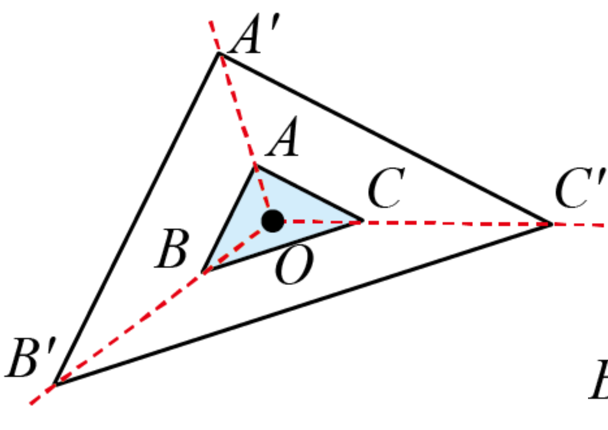
$$\begin{aligned}\angle ABC &= \angle OBC - \angle OBA \\ &= \angle OB'C' - \angle OB'A' \\ &= \angle A'B'C'\text{。}\end{aligned}$$



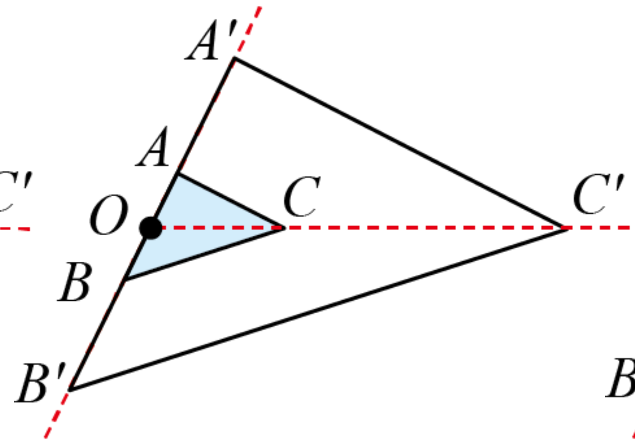
解

由 探索活動 可知，將一個$\triangle ABC$的圖形縮放 3 倍後得到$\triangle A'B'C'$，則$\angle BAC = \angle B'A'C'$、$\angle ABC = \angle A'B'C'$、$\angle ACB = \angle A'C'B'$。即三內角經過縮放後，其角度皆不變，且其三邊長都放大 3 倍，所以對應邊成比例。

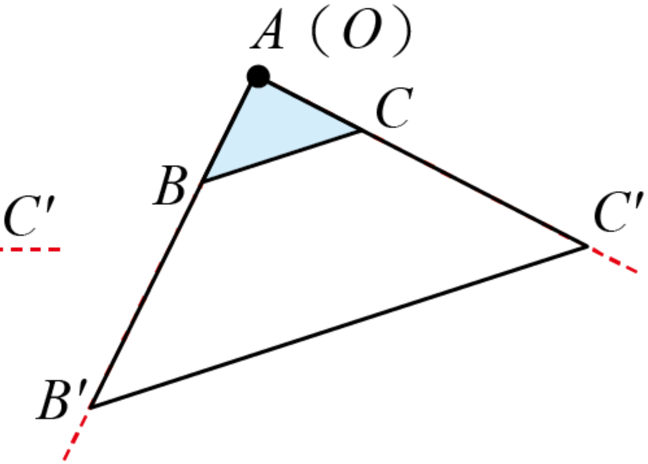
若將縮放中心 O 點改在其它的位置，把同一個 $\triangle ABC$ 縮放 3 倍後，所得的新三角形如圖二、圖三、圖四。接著將附件 3，依序與這三個新三角形疊合，可發現它們都與附件 3 的 $\triangle A'B'C'$ 全等。



圖二
O 點在三角形內部



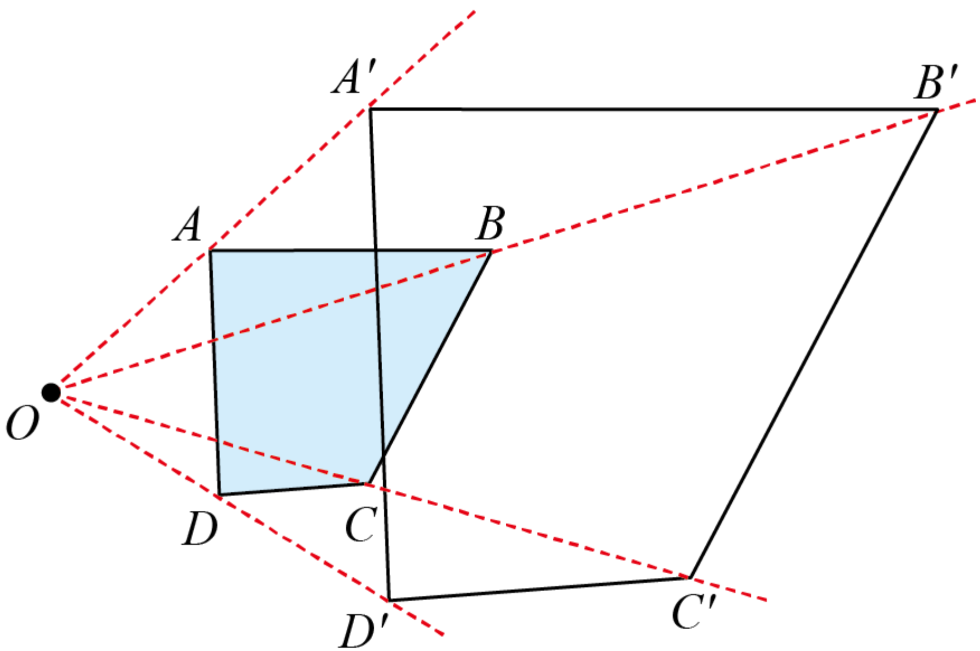
圖三
O 點在三角形邊上



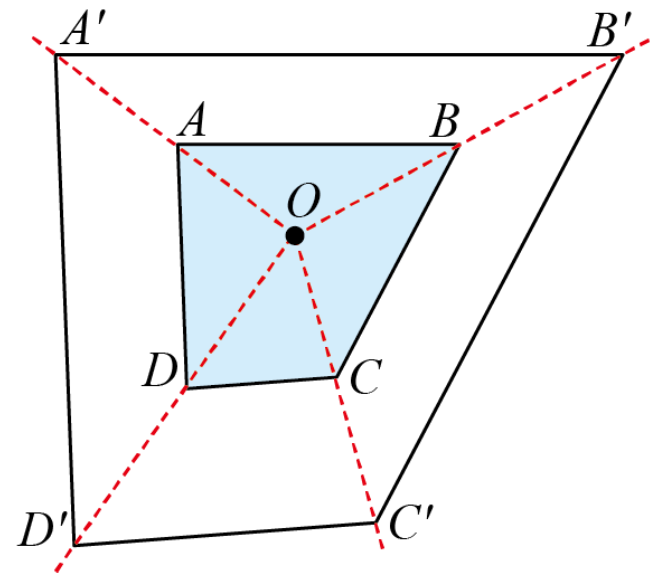
圖四
O 點在三角形的頂點

由前面的說明可知，**縮放中心 O 點在不同的位置，將同一個 $\triangle ABC$ 縮放 3 倍後，所得的新三角形都會全等，它們與 $\triangle ABC$ 的對應角皆不變、對應邊成比例**。

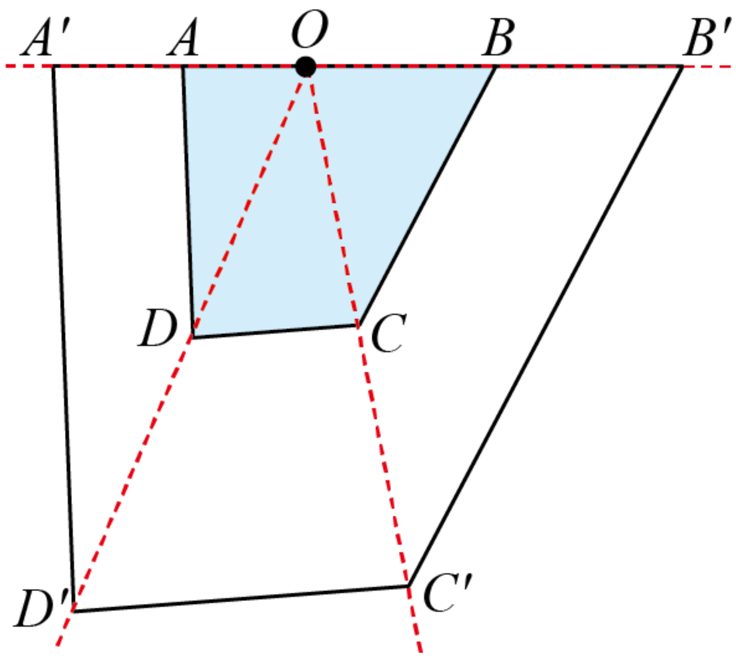
同樣的，縮放中心 O 點在不同的位置，將同一個四邊形縮放 2 倍後，所得的新四邊形也都會全等，且與原四邊形的對應角皆相等、對應邊成比例。



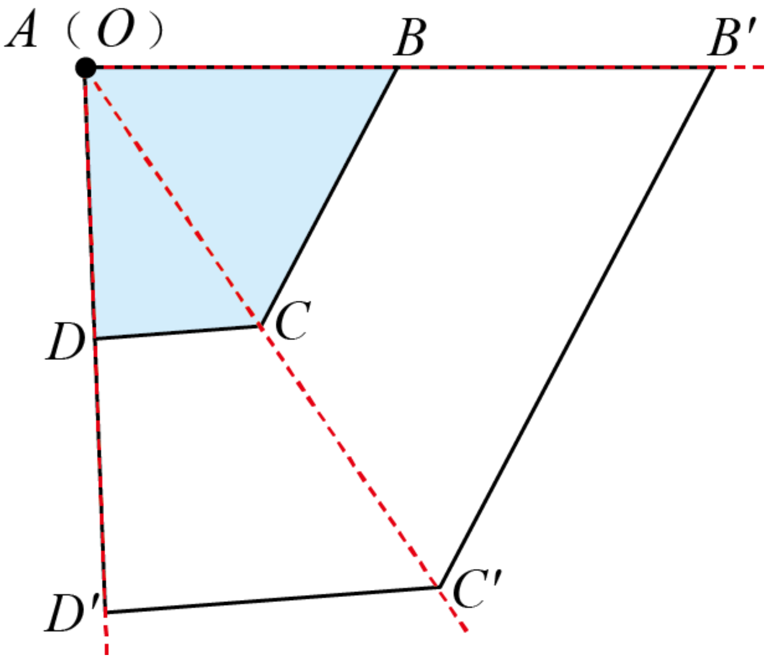
圖一 O 點在四邊形的外部



圖二 O 點在四邊形的內部

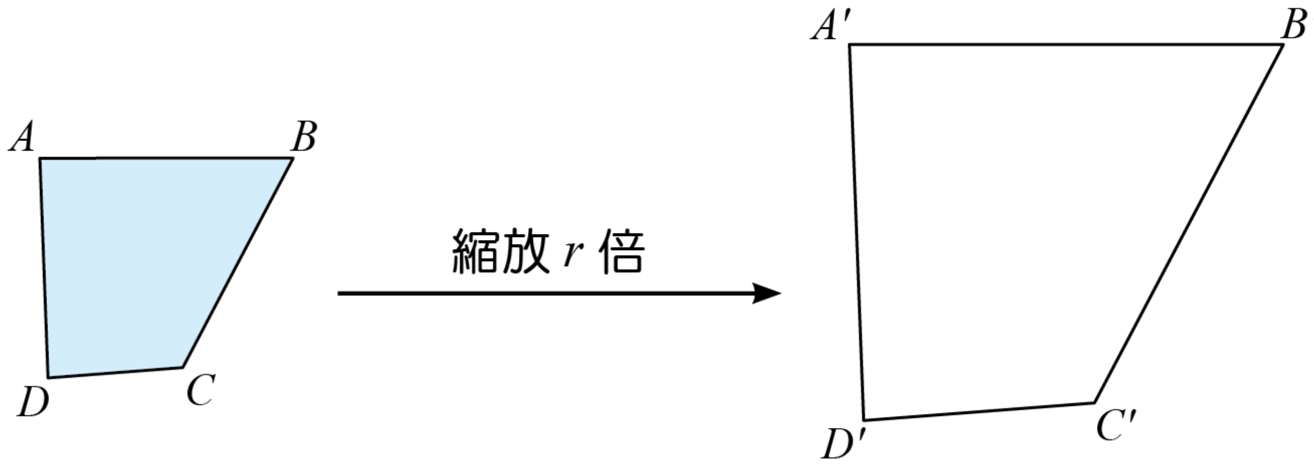


圖三 O 點在四邊形的邊上



圖四 O 點在四邊形的頂點

四邊形 $ABCD$ 與四邊形 $A'B'C'D'$ 的對應關係：

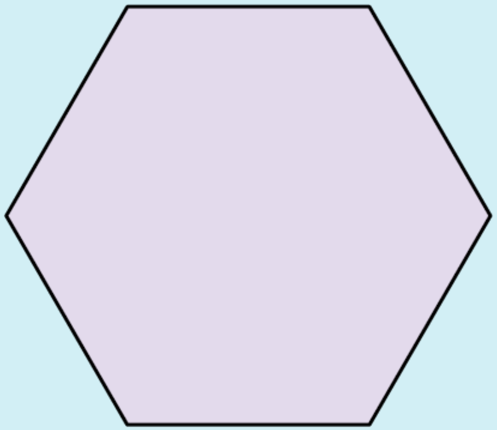


對應頂點	$A \leftrightarrow A'$、$B \leftrightarrow B'$、$C \leftrightarrow C'$、$D \leftrightarrow D'$
對應角相等	$\angle A = \angle A'$，$\angle B = \angle B'$，$\angle C = \angle C'$，$\angle D = \angle D'$
對應邊成比例	$\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{D'A'}}{\overline{DA}} = r$ 或 $\overline{A'B'} : \overline{B'C'} : \overline{C'D'} : \overline{D'A'} = \overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CD} : \overline{DA}$

事實上，縮放中心所在位置不同，對同一個多邊形做 r 倍縮放，所得的圖形都會全等，則此縮放後的新圖形，稱為原多邊形的 r 倍縮放圖，它們會與原多邊形的對應角相等、對應邊成比例。

例 1 多邊形的縮放

右圖是邊長為 2 公分的正六邊形，將它縮放 3 倍後所得的縮放圖形，其內角度數與邊長分別是多少？



解 正六邊形的每一個內角是 120°，

$\because$ 縮放後的多邊形，會與原多邊形的對應角相等、對應邊成比例，

$\therefore$ 內角度數保持不變，仍是 120°，

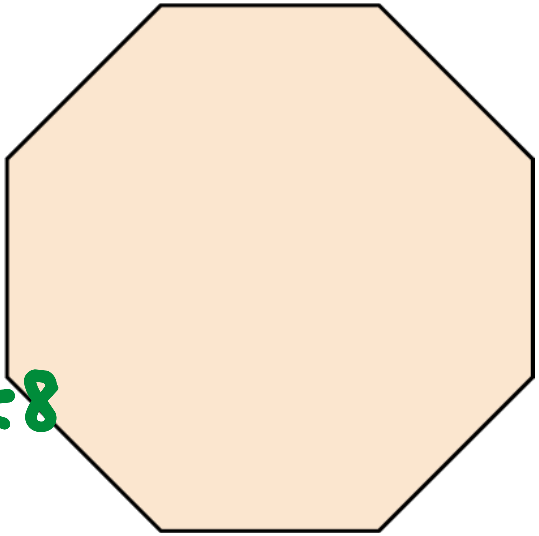
邊長變成原來的 3 倍，即 $2\times3=6$（公分）。

正 n 邊形的每一個內角是 $\dfrac{(n-2)\times180^\circ}{n}$。

翰林出版

隨堂練習

右圖是邊長為 1.5 公分的正八邊形，將它縮放 2 倍後所得的縮放圖形，其內角度數與邊長分別是多少？



內角和公式$=(8-2)\times180\div8$

正八邊形的每一個內角是 $135°$，

∵縮放後的多邊形，
會與原多邊形的對應角相等、對應邊成比例，

∴內角度數保持不變，仍是 $135°$，

邊長變成原來的 2 倍，

也就是 $2\times1.5=3$（公分）。

#

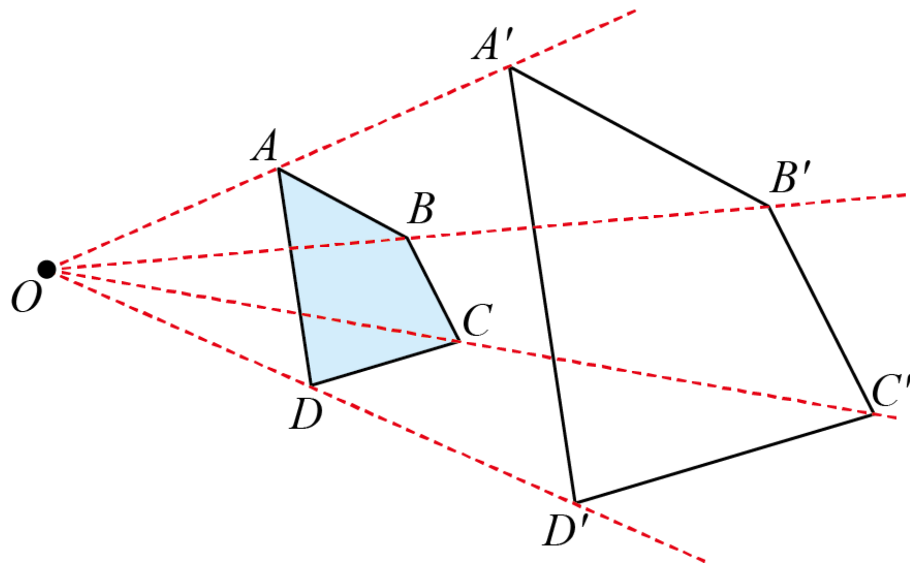
2 相似多邊形

上圖是艾美設計的一組俄羅斯套娃平面圖，它們看起來相似。

兩個邊數一樣的多邊形，若其**對應角相等、對應邊成比例**，就稱這兩個多邊形相似。通常**以符號「～」表示它們的相似關係，讀作「相似於」**。

如圖，四邊形 $A'B'C'D'$ 是四邊形 $ABCD$ 的縮放圖形，所以對應角相等、對應邊成比例，因此四邊形 $ABCD \sim$ 四邊形 $A'B'C'D'$。

也就是說，兩個多邊形相似，它們的對應角相等、對應邊成比例。



相似多邊形

1. 如果兩個多邊形的對應角相等、對應邊成比例，就稱這兩個多邊形相似。
2. 如果兩個多邊形相似，它們的對應角相等、對應邊成比例。

例 2 相似多邊形的對應關係

相似

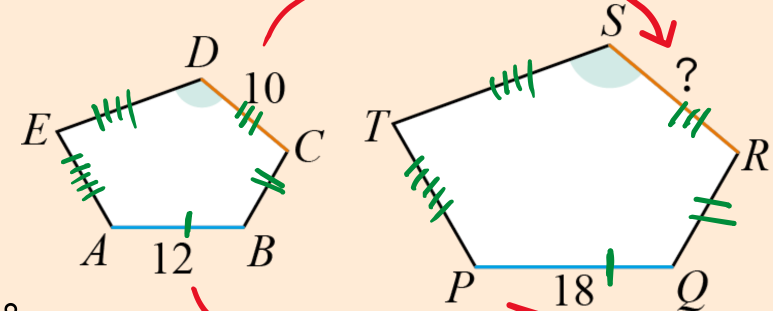
已知五邊形 $ABCDE$ ~ 五邊形 $PQRST$，A、B、C、D、E 的對應頂點依序為 P、Q、R、S、T，回答下列問題：

(1) 若 $\overline{AB}=12$，$\overline{CD}=10$，$\overline{PQ}=18$，求 $\overline{RS}$ 的長。

(2) 若 $\angle P+\angle Q=240^\circ$，$\angle R:\angle S:\angle T=5:6:4$，求 $\angle D$。

思路分析

五邊形 $ABCDE$ ~ 五邊形 $PQRST$，$\overline{AB}$ 的對應邊是 $\overline{PQ}$；$\overline{CD}$ 的對應邊是 $\overline{RS}$，利用相似多邊形對應邊成比例、對應角相等的性質來做此題。



$12:18=10:\square$

$180=12\times\square$，$\square=15$#

放大幾倍

（接續下頁）

例 2 相似多邊形的對應關係

已知五邊形 $ABCDE \sim$ 五邊形 $PQRST$，A、B、C、D、E 的對應頂點依序為 P、Q、R、S、T，回答下列問題：

(1) 若 $\overline{AB}=12$，$\overline{CD}=10$，$\overline{PQ}=18$，求 $\overline{RS}$ 的長。

(2) 若 $\angle P+\angle Q=240^\circ$，$\angle R:\angle S:\angle T=5:6:4$，求 $\angle D$。

解 (1) $\because$ 相似形的對應邊成比例，

$\therefore \overline{AB}:\overline{PQ}=\overline{CD}:\overline{RS}$

$12:18=10:\overline{RS}$

$\overline{RS}=15$。

(接續下頁)

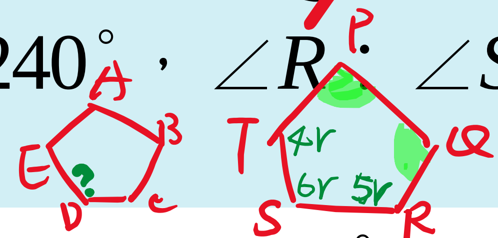
例 2　相似多邊形的對應關係

已知五邊形 $ABCDE$ ~ 五邊形 $PQRST$，A、B、C、D、E 的對應頂點依序為 P、Q、R、S、T，回答下列問題：

(1) 若 $\overline{AB}=12$，$\overline{CD}=10$，$\overline{PQ}=18$，求 $\overline{RS}$ 的長。

(2) 若 $\angle P+\angle Q=240^\circ$，$\angle R:\angle S:\angle T=5:6:4$，求 $\angle D$。

$5\times r$　$6\times r$　$4\times r$



解 (2) 設 $\angle R=5r^\circ$，$\angle S=6r^\circ$，$\angle T=4r^\circ$，$r\neq 0$，

$\because \underbrace{\angle P+\angle Q}_{240}+\underbrace{\angle R}_{5r}+\underbrace{\angle S}_{6r}+\underbrace{\angle T}_{4r}=540^\circ$　$(5-2)\times 180$ $=3\times 180$ $=540$ #

$\therefore 240+5r+6r+4r=540$，$r=20$

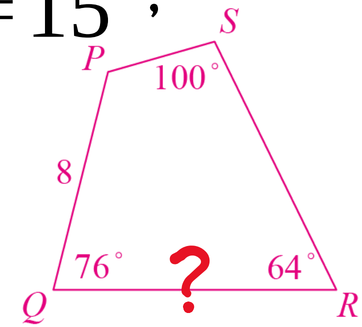
又相似形的對應角相等，

故 $\angle D=\angle S=6\times 20^\circ=120^\circ$。 #

隨堂練習

內角和=360°

已知四邊形 $ABCD$～四邊形 $PQRS$，A、B、C、D 的對應頂點依序為 P、Q、R、S，若 $\angle Q=76^\circ$，$\angle R=64^\circ$，$\angle S=100^\circ$，$\overline{AB}=12$，$\overline{BC}=15$，$\overline{PQ}=8$，求 $\angle A$ 及 $\overline{QR}$。

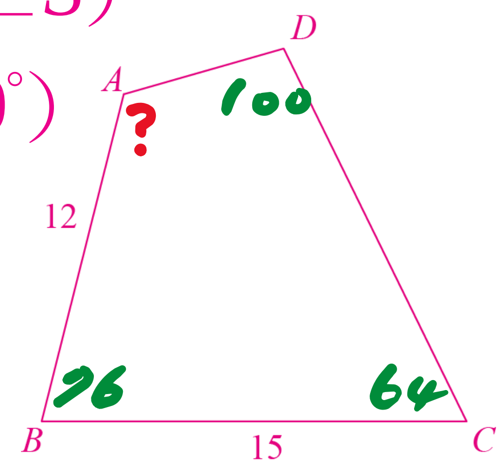


(1) ∵相似形的對應角相等

$\therefore \angle A=\angle P=360^\circ-(\angle Q+\angle R+\angle S)$

$=360^\circ-(76^\circ+64^\circ+100^\circ)$

$=120^\circ$



(2) $12\div 8=1.5$倍$=\frac{3}{2}$

$15\times\frac{2}{3}=10$

$12:8=15:\square$

(接續下頁)

解

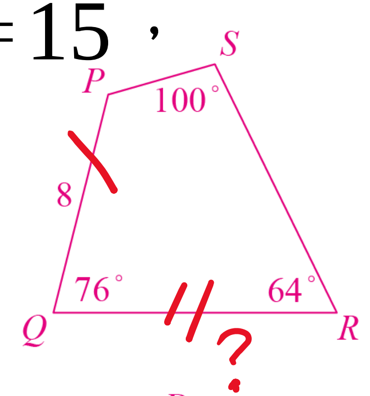
隨堂練習

已知四邊形 $ABCD$～四邊形 $PQRS$，A、B、C、D 的對應頂點依序為 P、Q、R、S，若 $\angle Q=76^{\circ}$，$\angle R=64^{\circ}$，$\angle S=100^{\circ}$，$\overline{AB}=12$，$\overline{BC}=15$，$\overline{PQ}=8$，求 $\angle A$ 及 $\overline{QR}$。

(一法)

乘 乘

$8:\square=12:15$



(2) ∵相似形的對應邊成比例

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{PQ}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{QR}}$，即 $\dfrac{12}{8}=\dfrac{15}{\overline{QR}}$，

故 $\overline{QR}=10$。

#

(二法)

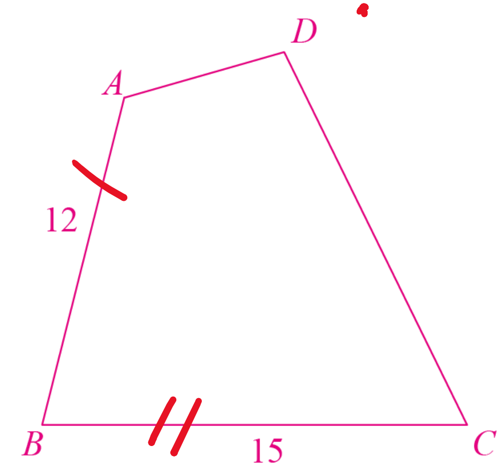
乘 乘

$12:8=15:\square$

$120=12\times\square$

$10=\square$

#

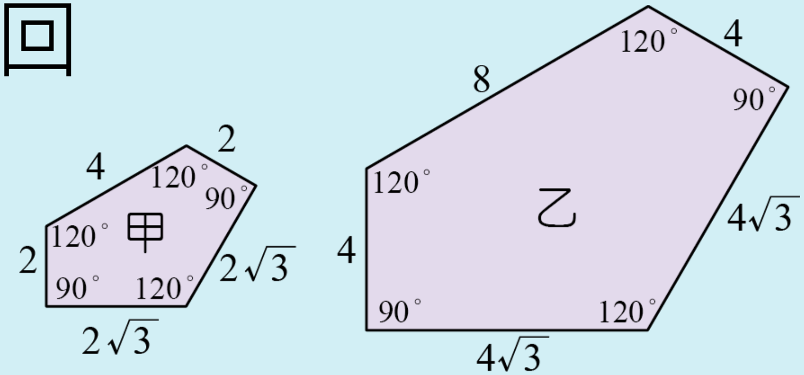


解

例 3 相似多邊形的判別

如圖，甲、乙都是五邊形，回答下列問題，並說明理由。

(1) 甲與乙的對應角是否相等？



解 (1) 是。

∵對應角分別相等。

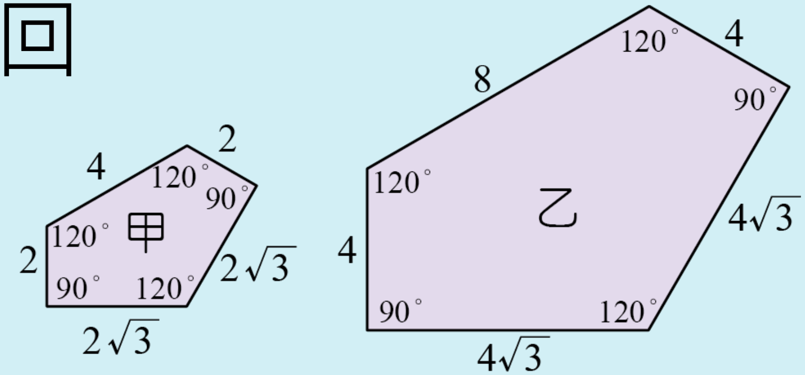
#

解

例 3 相似多邊形的判別

如圖，甲、乙都是五邊形，回答下列問題，並說明理由。

(2) 甲與乙的對應邊是否成比例？



解 (2) 是。

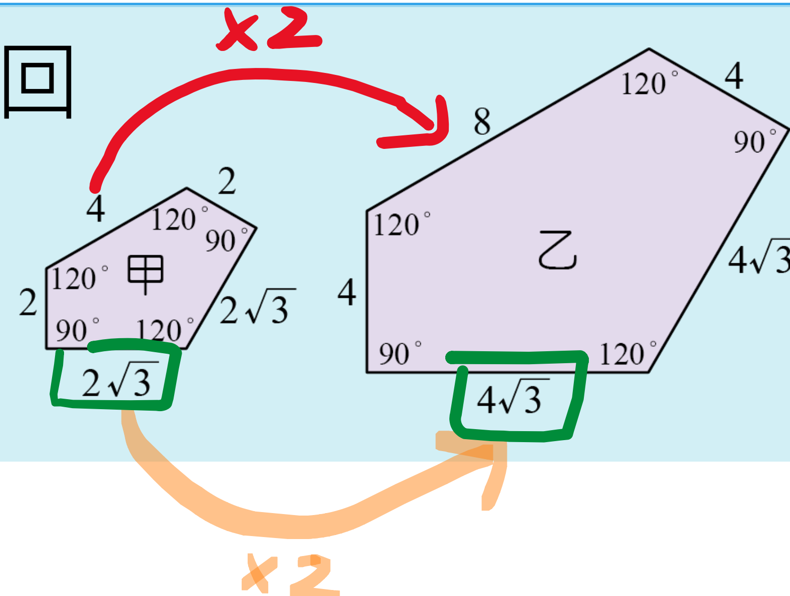
∵對應邊長比是 1：2。

\#

例 3 相似多邊形的判別

如圖，甲、乙都是五邊形，回答下列問題，並說明理由。

(3) 甲與乙是否相似？



解 (3) 是。

∵對應角相等、對應邊成比例，

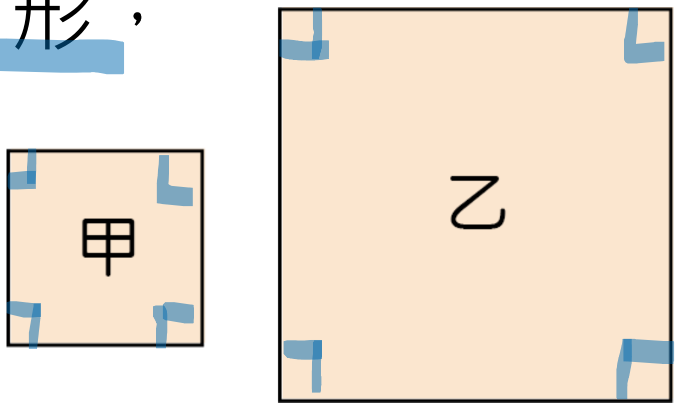
∴甲與乙相似。

#

解

隨堂練習

如圖，甲是邊長為 1 的正方形，乙是邊長為 2 的正方形，回答下列問題：



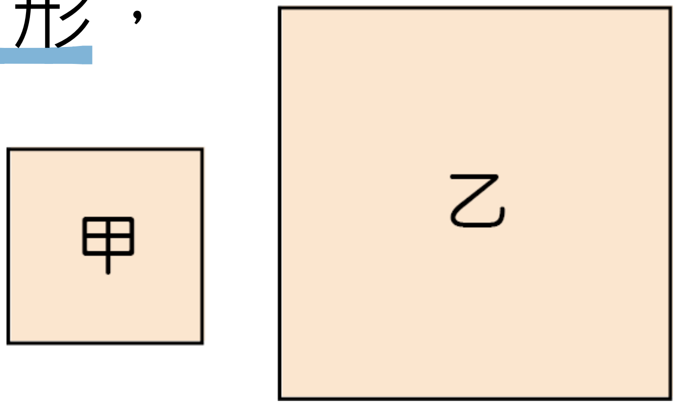
(1) 甲與乙的對應角是否相等？

(2) 是。

∵對應角分別相等。

隨堂練習

如圖，甲是邊長為 1 的正方形，乙是邊長為 2 的正方形，回答下列問題：



(2) 甲與乙的對應邊是否成比例？

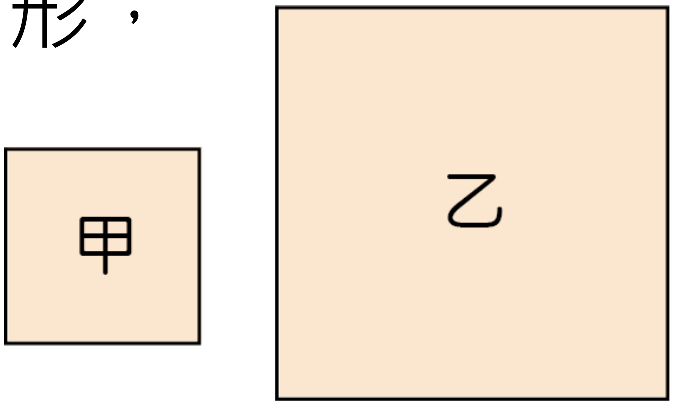
(2) 是。

∵對應邊長比是 1：2。

隨堂練習

如圖，甲是邊長為 1 的正方形，
乙是邊長為 2 的正方形，
回答下列問題：

(3) 甲與乙是否相似？



(3) 是。

∵對應角相等、對應邊成比例，

∴甲與乙相似。

#

解

兩個多邊形的「對應角相等」與「對應邊成比例」如果只有一個條件成立，則這兩個多邊形是否一定相似？

例 4 相似多邊形的判別

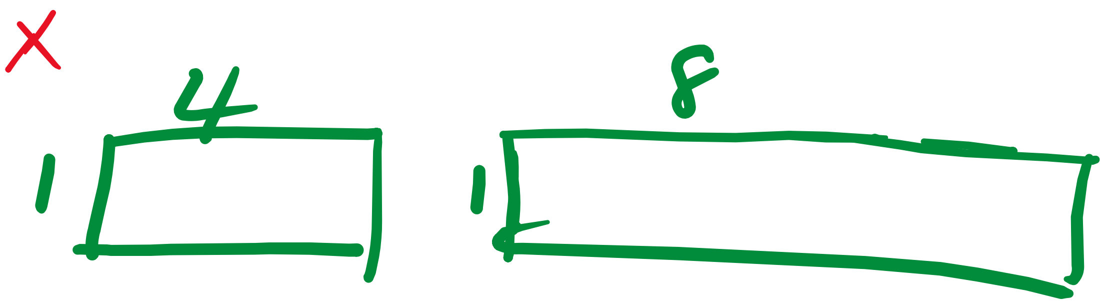
回答下列問題，並說明理由。

(1) 兩個任意的長方形是否相似？

說明

(1) 兩個長方形不一定相似。

∵長方形的四組對應角雖然相等(皆為 90°)，
但對應邊長不一定成比例。



(接續下頁)

例 4 相似多邊形的判別

回答下列問題，並說明理由。

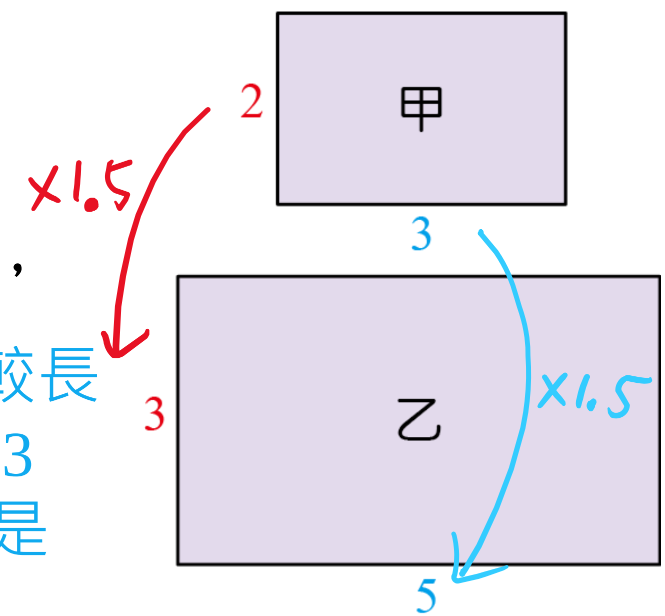
(1) 兩個任意的長方形是否相似？

說明

例如：右圖中，甲、乙兩個長方形對應邊長的比分別為 3：5 與 2：3，

∵3：5≠2：3，←要比較 3：5(較長邊之比)和 2：3(較短邊之比)是否相等。

∴甲、乙兩個長方形不相似。#



例 4 相似多邊形的判別

回答下列問題，並說明理由。

(2) 兩個任意的菱形是否相似？

說明

相似⇒角度不變

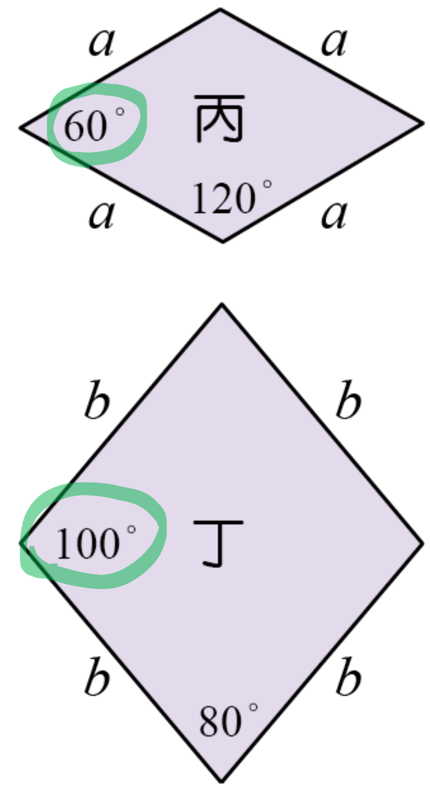
(2) 兩個菱形不一定相似。

∵兩個菱形的對應邊雖然成比例，
但對應角不一定相等。

例如：右圖中，60°和120°皆無
法找到對應相等的角，

∴此兩個菱形不相似。

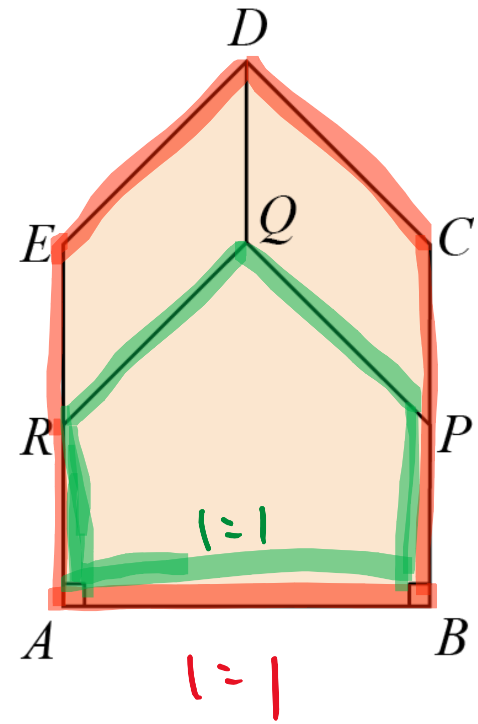
#



解

隨堂練習

如圖，$ABCDE$ 為五邊形，$\angle A=\angle B=90^{\circ}$，$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{AE}$，四邊形 $DERQ$ 與四邊形 $DCPQ$ 皆為平行四邊形，P、R 分別是 $\overline{BC}$、$\overline{AE}$ 的中點，回答下列問題：



(1) 五邊形 ABCDE 與五邊形 ABPQR 的對應角是否相等？

(2) 五邊 $ABCDE$ 與五邊形 $ABPQR$ 的對應邊是否成比例？否。

(3) 五邊形 ABCDE 與五邊形 ABPQR 是否相似？ 否。

解

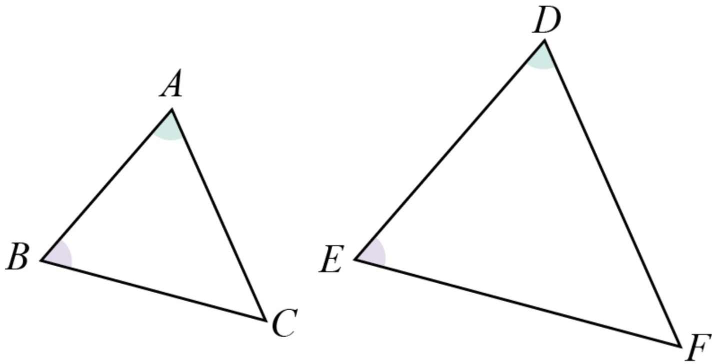
從前面的例題與 隨堂練習 可知，當兩個多邊形的「對應角相等」與「對應邊成比例」條件缺一時，則這兩個多邊形不一定相似。

3 三角形的相似性質

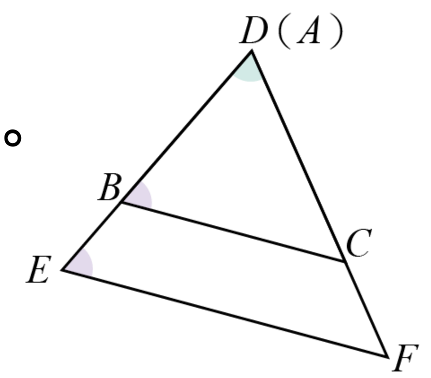
兩個多邊形必須對應邊成比例與對應角相等，這兩個多邊形才會相似。至於兩個三角形的相似，是否這些條件也必須都符合才相似呢？我們曾經學過三角形的全等性質有 *SSS*、*SAS*、*ASA*、*AAS*、*RHS* 等，那麼要判別兩個三角形是否相似，也會有類似的性質嗎？接下來，我們來探討三角形的相似性質。

AA 相似性質

如右圖，△ABC 與△DEF 中，
若 $\angle A = \angle D$，$\angle B = \angle E$，
則△ABC 與△DEF 是否相似？

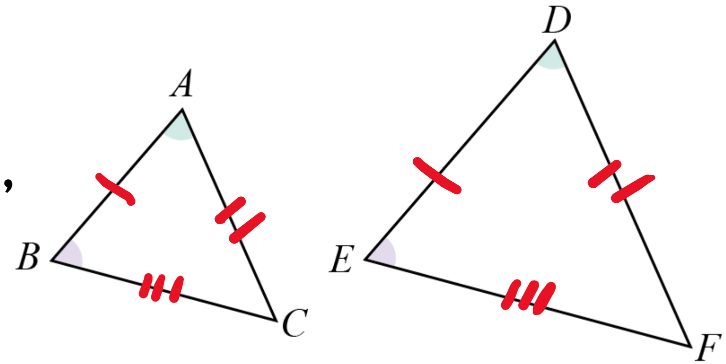


由於 $\angle A = \angle D$，
可將△ABC 疊合在△DEF 上，
使得 A 點落在 D 點上，
則 B、C 兩點分別在 $\overline{DE}$ 與 $\overline{DF}$ 上。

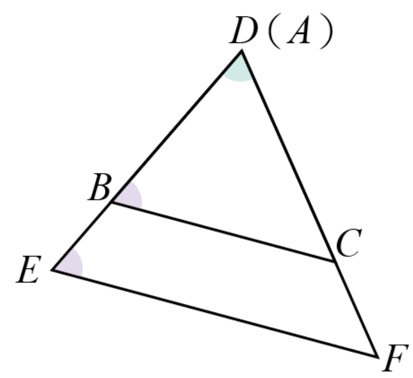


又 $\angle B=\angle E$，所以 $\overline{BC}\,/\!/\,\overline{EF}$，
可得 $\angle C=\angle F$，

且 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{DF}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$。



由上可知，$\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$
的對應角相等、對應邊成比例，
所以 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$。



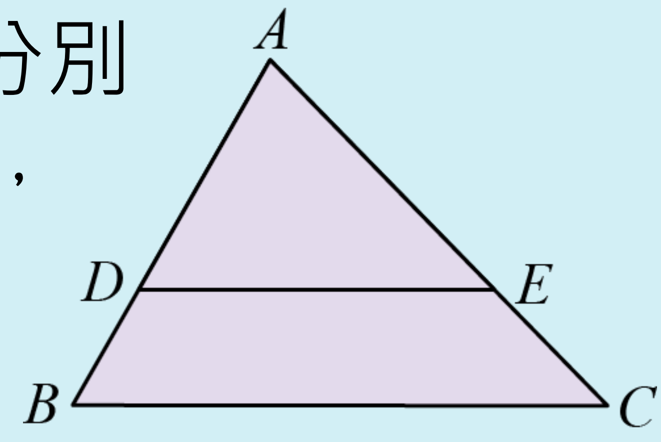
AA 相似性質

若兩個三角形的兩組對應角相等，則這兩個三角形相似，這個性質稱為 **AA 相似性質**。

例 5 平行線與相似三角形

如圖，$\triangle ABC$ 中，D、E 兩點分別在 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 上，已知 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$，$\overline{AD}=6$，$\overline{BD}=3$，$\overline{DE}=8$。

(1) 說明$\triangle ADE \sim \triangle ABC$。



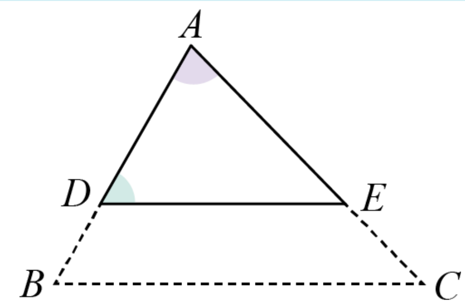
解 (1) 在$\triangle ADE$ 與$\triangle ABC$ 中，

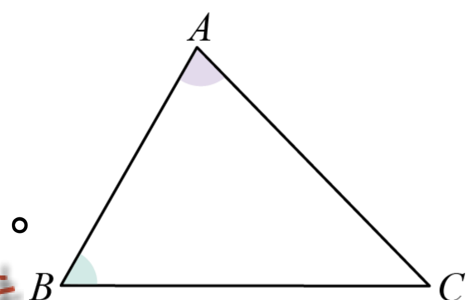
$\because \overline{DE} \parallel \overline{BC}$，

$\therefore \angle ADE = \angle B$（同位角相等），

又$\angle A = \angle A$（公用角），

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$（AA 相似性質）。

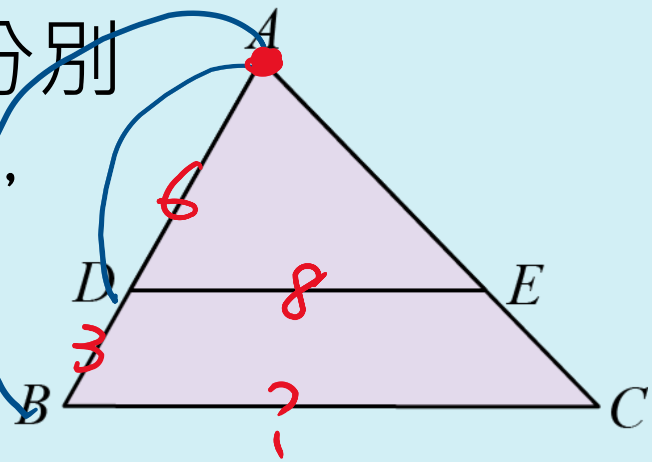




例 5 平行線與相似三角形

如圖，$\triangle ABC$ 中，D、E 兩點分別在 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 上，已知 $\overline{DE} // \overline{BC}$，$\overline{AD}=6$，$\overline{BD}=3$，$\overline{DE}=8$。

(2) 求 $\overline{BC}$。



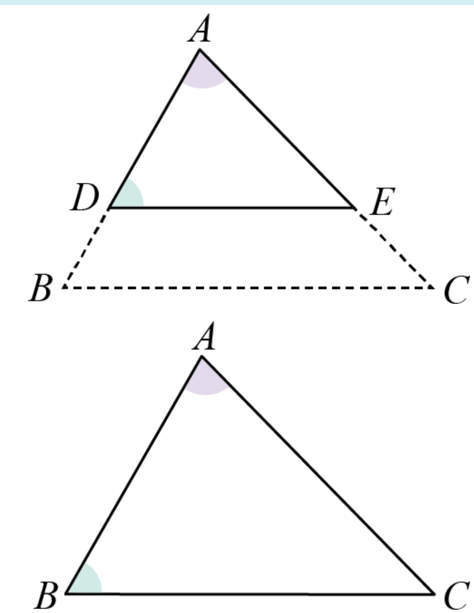
解 (2) $\because \triangle ADE \sim \triangle ABC$

$$\therefore \overset{小}{\overline{DE}} : \overset{大}{\overline{BC}} = \overset{小}{\overline{AD}} : \overset{大}{\overline{AB}}$$

$$8 : \overline{BC} = 6 : (6+3)$$

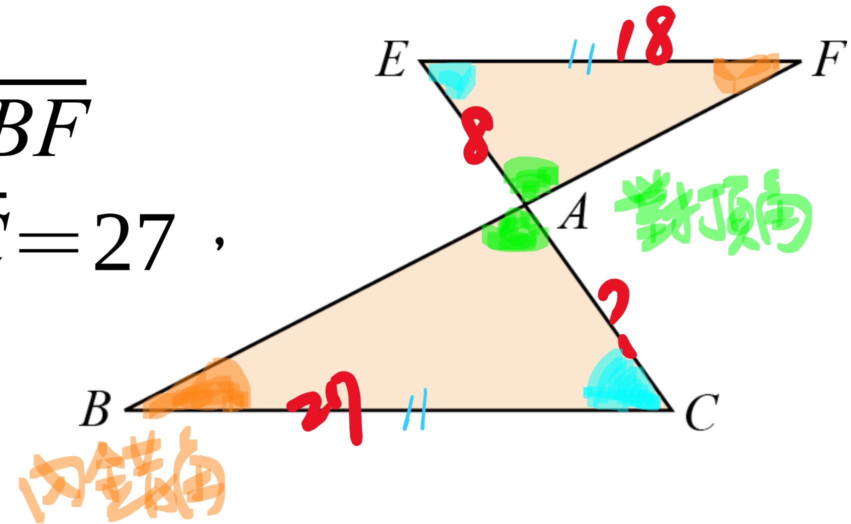
$$\overline{BC} = 12$$

\#



隨堂練習

如圖，$\overline{EF} \parallel \overline{BC}$，$\overline{EC}$ 與 $\overline{BF}$ 交於 A 點，$\overline{EF}=18$，$\overline{BC}=27$，$\overline{AE}=8$，求 $\overline{AC}$。



$\because \overline{EF} \parallel \overline{BC}$，

$\therefore \triangle AEF \sim \triangle ACB$（$AA$ 相似性質）

故 $\overline{AE} : \overline{AC} = \overline{EF} : \overline{BC}$

$8 : \overline{AC} = 18 : 27$

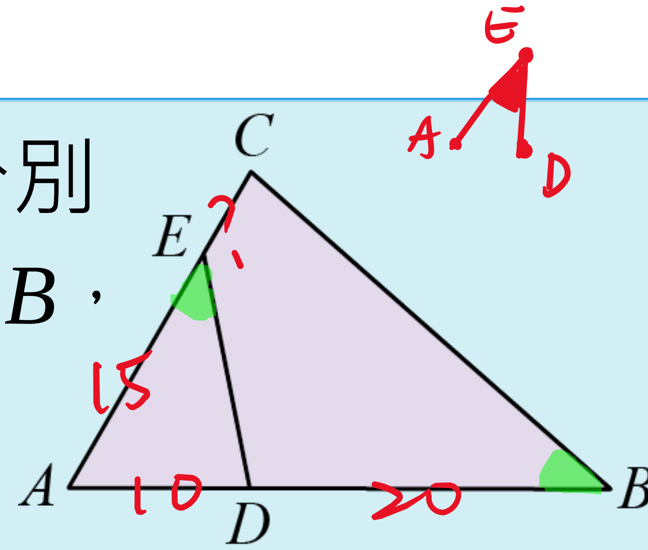
$\overline{AC} = 12$ #

(二法) 18:27=8:□

(三法) 18:8=27:□

例 6　AA 相似性質

如圖，$\triangle ABC$ 中，D、E 兩點分別在 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 上，已知 $\angle AED=\angle B$，$\overline{AD}=10$，$\overline{BD}=20$，$\overline{AE}=15$，求 $\overline{EC}$。

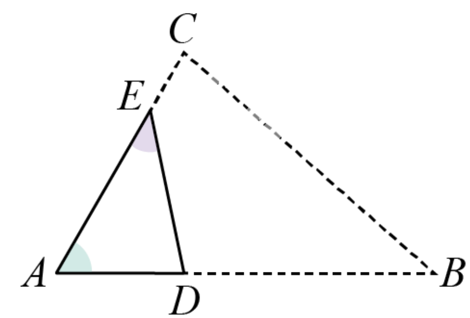


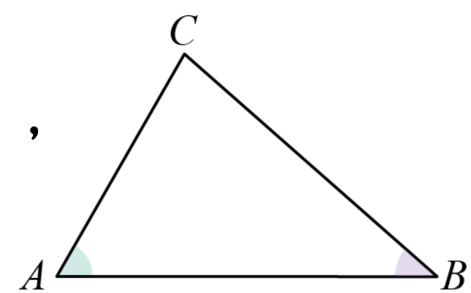
解　在 $\triangle ADE$ 與 $\triangle ACB$ 中，

$\because \angle AED=\angle B$（已知）

$\angle A=\angle A$（公用角），

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ACB$（AA 相似性質），

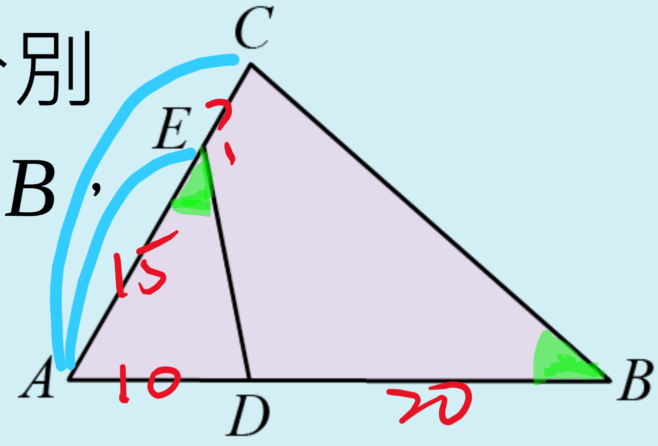




（接續下頁）

例 6 AA 相似性質

如圖，$\triangle ABC$ 中，D、E 兩點分別在 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 上，已知 $\angle AED = \angle B$，$\overline{AD}=10$，$\overline{BD}=20$，$\overline{AE}=15$，求 $\overline{EC}$。 要求 $\overline{EC}$，可用 $\overline{AC}-\overline{AE}$ #

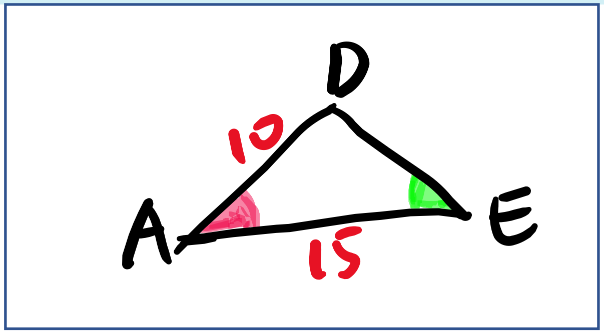


解 因此 $\overline{AD}:\overline{AC}=\overline{AE}:\overline{AB}$

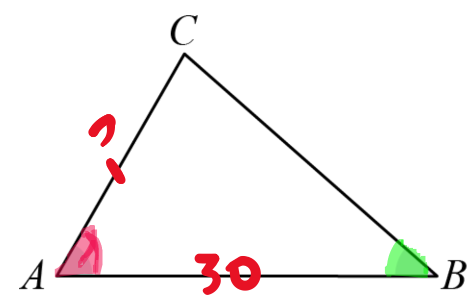
$10:\overline{AC}=15:(10+20)$

$\overline{AC}=20$

故 $\overline{EC}=\overline{AC}-\overline{AE}=20-15=5$。

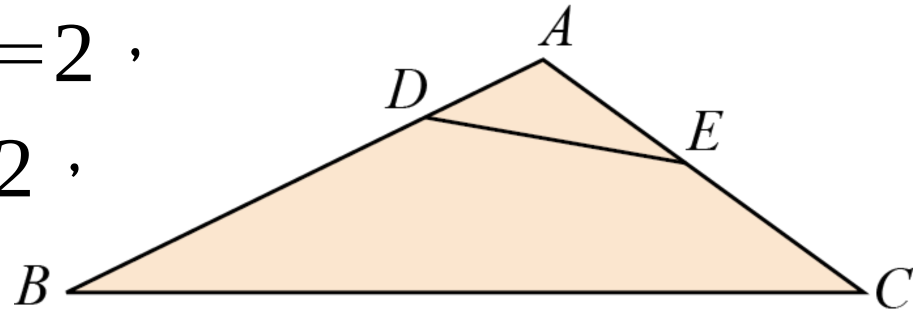


#



隨堂練習

如圖，$\triangle ABC$ 中，D、E 兩點分別在 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$上，已知$\angle ADE = \angle C$，$\overline{AD}=2$，$\overline{AB}=8$，$\overline{AC}=6$，$\overline{BC}=12$，求 $\overline{AE}$ 與 $\overline{DE}$ 。



由 AA 相似性質可知$\triangle ABC \sim \triangle AED$，

$\overline{AC} : \overline{AD} = \overline{AB} : \overline{AE} = \overline{BC} : \overline{DE}$

$6 : 2 = 8 : \overline{AE} = 12 : \overline{DE}$

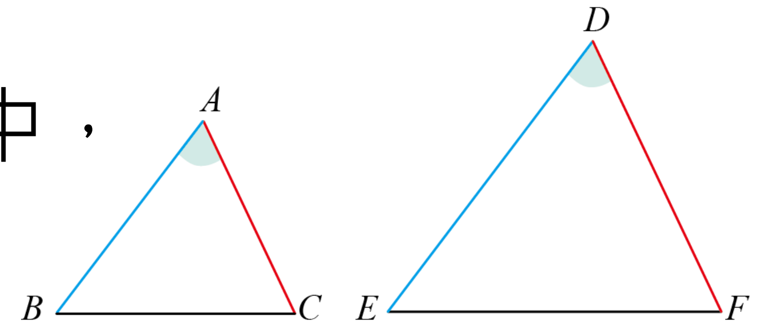
$\overline{AE} = \dfrac{8}{3}$，$\overline{DE} = 4$。

SAS 相似性質

如右圖，$\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中，

若 $\angle A=\angle D$，$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$，

則 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 是否相似呢？

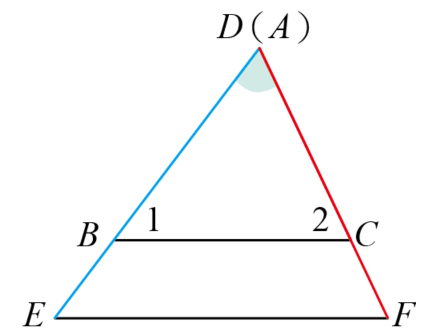


由於 $\angle A=\angle D$，

可將 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 疊合，

使得 A 點落在 D 點上，

則 B、C 兩點分別在 $\overline{DE}$ 與 $\overline{DF}$ 上。



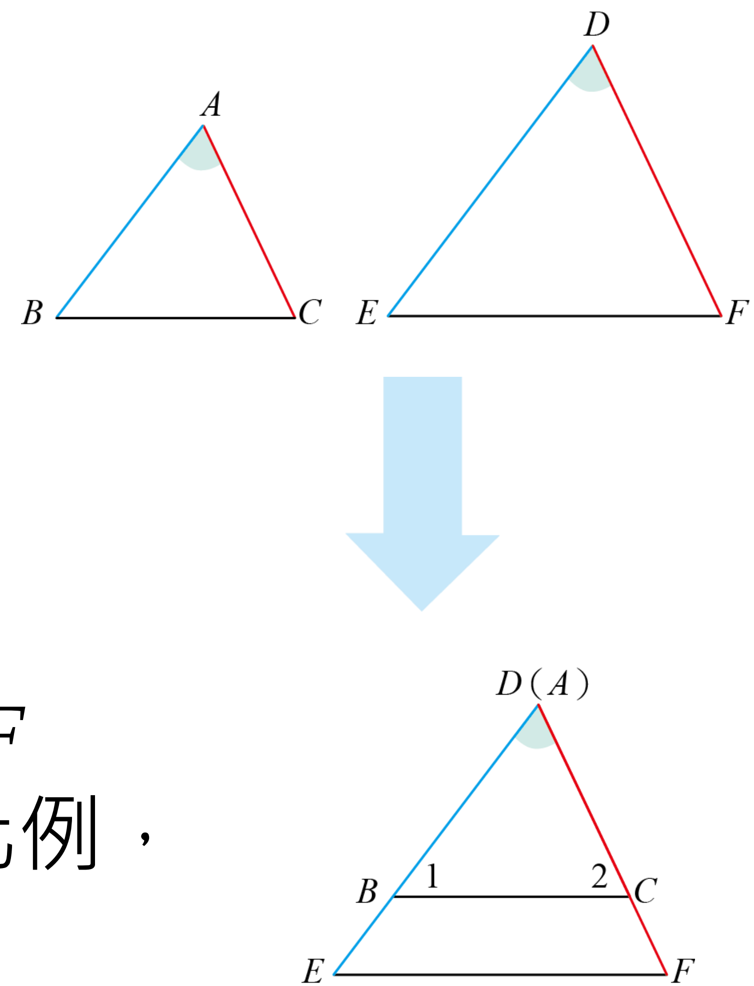
又 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$，即 $\dfrac{\overline{DB}}{\overline{DE}}=\dfrac{\overline{DC}}{\overline{DF}}$，

所以 $\overline{BC}\,//\,\overline{EF}$，

因此 $\angle 1=\angle E$、$\angle 2=\angle F$，

且 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{DF}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$。

由上可知，$\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的對應角相等、對應邊成比例，所以 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$。



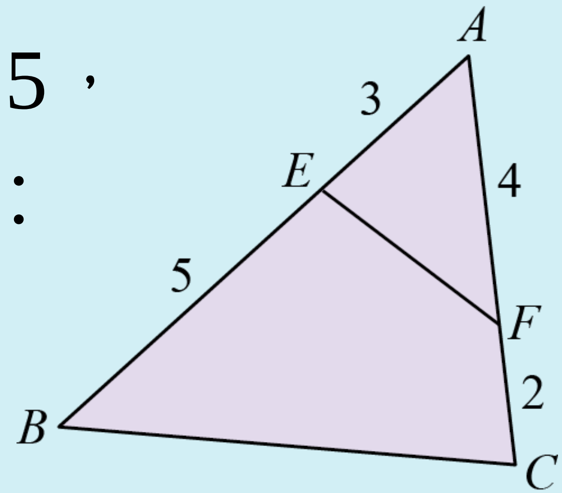
SAS 相似性質

若兩個三角形有一組對應角相等，且夾此等角的兩組對應邊成比例，則這兩個三角形相似，這個性質稱為 ***SAS* 相似性質**。

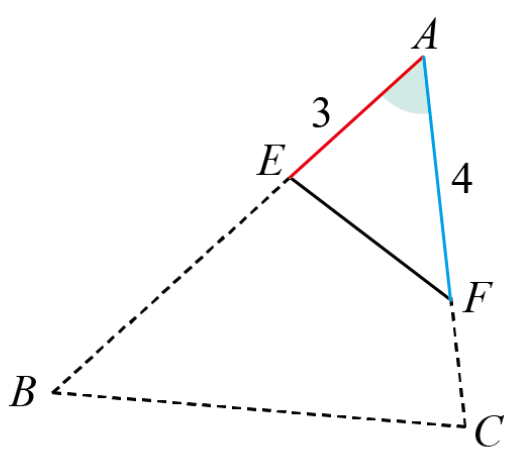
例 7 SAS 相似性質

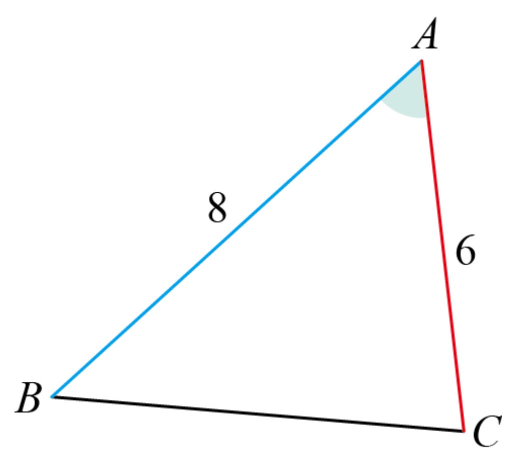
如圖，$\triangle ABC$中，$\overline{AE}=3$，$\overline{EB}=5$，$\overline{AF}=4$，$\overline{FC}=2$，回答下列問題：

(1) $\triangle AEF$ 與$\triangle ACB$ 是否相似？為什麼？



解 (1) 在$\triangle AEF$ 與$\triangle ACB$ 中，



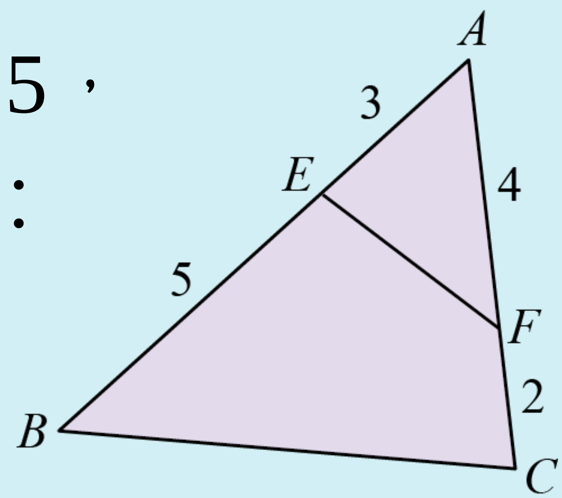


（接續下頁）

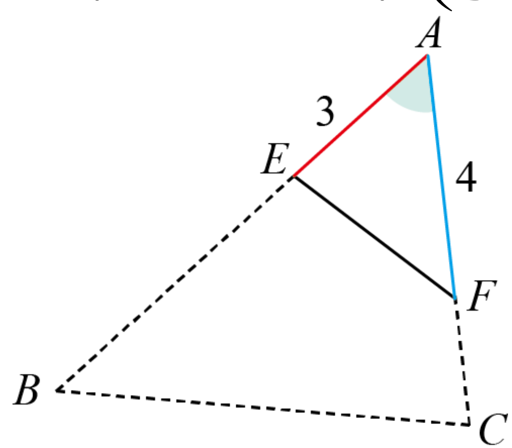
例 7 SAS 相似性質

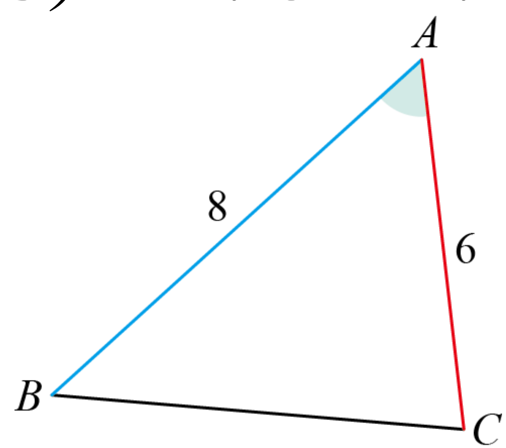
如圖，$\triangle ABC$中，$\overline{AE}=3$，$\overline{EB}=5$，$\overline{AF}=4$，$\overline{FC}=2$，回答下列問題：

(1) $\triangle AEF$ 與$\triangle ACB$ 是否相似？為什麼？



解 $\because \left.\begin{array}{l}\overline{AE}:\overline{AC}=3:(4+2)=3:6=1:2\\ \overline{AF}:\overline{AB}=4:(3+5)=4:8=1:2\end{array}\right\}$ $\overline{AE}:\overline{AC}=\overline{AF}:\overline{AB}$



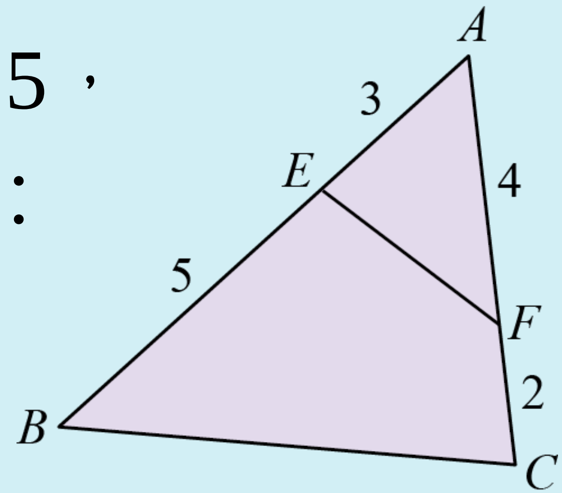


（接續下頁）

例 7 SAS 相似性質

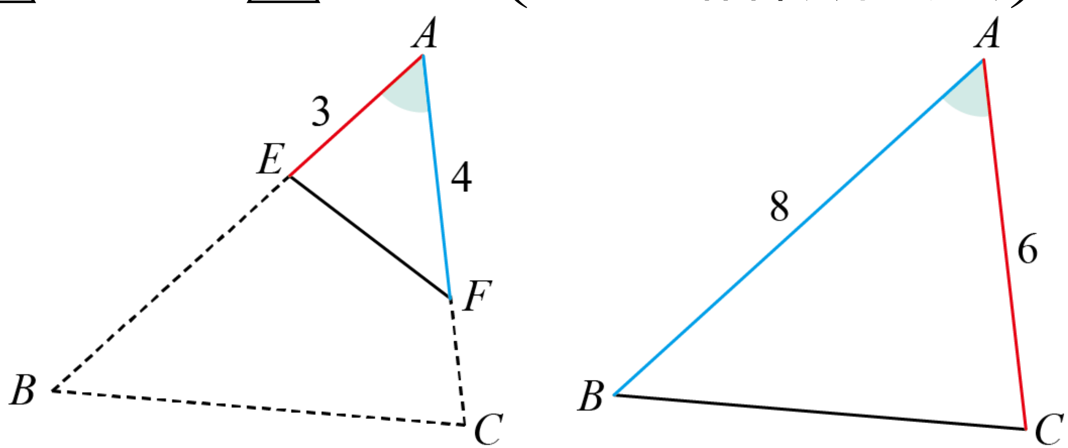
如圖，$\triangle ABC$中，$\overline{AE}=3$，$\overline{EB}=5$，$\overline{AF}=4$，$\overline{FC}=2$，回答下列問題：

(1) $\triangle AEF$ 與$\triangle ACB$ 是否相似？為什麼？



解 又$\angle A=\angle A$，

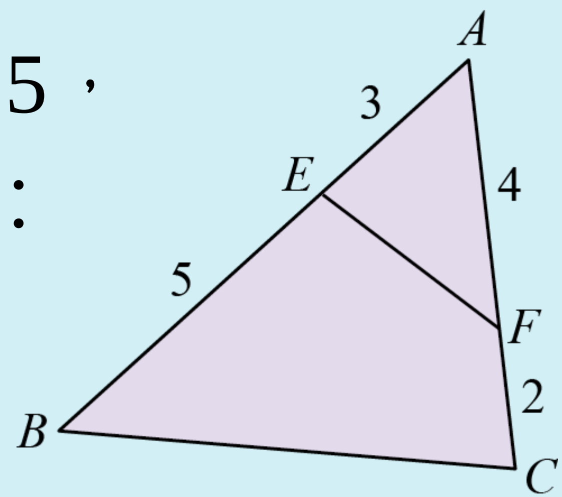
$\therefore \triangle AEF \sim \triangle ACB$（SAS 相似性質）。



例 7 SAS 相似性質

如圖，$\triangle ABC$中，$\overline{AE}=3$，$\overline{EB}=5$，$\overline{AF}=4$，$\overline{FC}=2$，回答下列問題：

(2) 若 $\overline{EF}=3.3$，求 $\overline{BC}$。



解 (2) $\because \triangle AEF \sim \triangle ACB$，

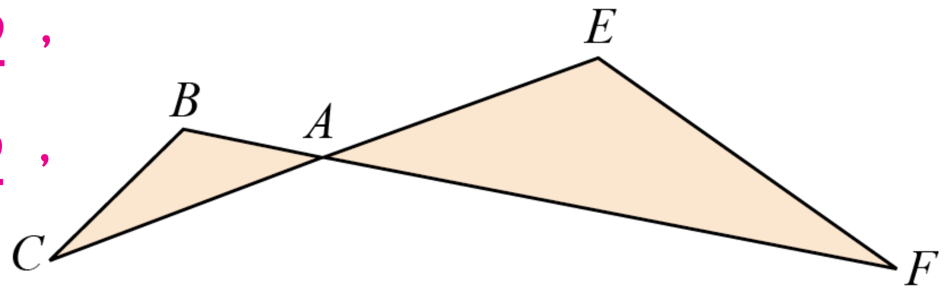
$\therefore \overline{EF}:\overline{BC}=\overline{AE}:\overline{AC}$

$3.3:\overline{BC}=3:6$

$\overline{BC}=6.6$。 #

隨堂練習

如圖，$\overline{EC}$ 與 $\overline{BF}$ 交於 A 點，$\overline{AB}=10$，$\overline{AC}=\overline{AE}=20$，$\overline{AF}=40$，$\overline{EF}=25.6$，求 $\overline{BC}$。



在$\triangle ABC$ 與$\triangle AEF$ 中，

$\because \overline{AB}:\overline{AE}=10:20=1:2$，

$\overline{AC}:\overline{AF}=20:40=1:2$，

又$\angle BAC=\angle EAF$，

$\therefore \triangle ABC\sim\triangle AEF$（SAS 相似性質）。

故 $\overline{BC}:\overline{EF}=\overline{AB}:\overline{AE}$

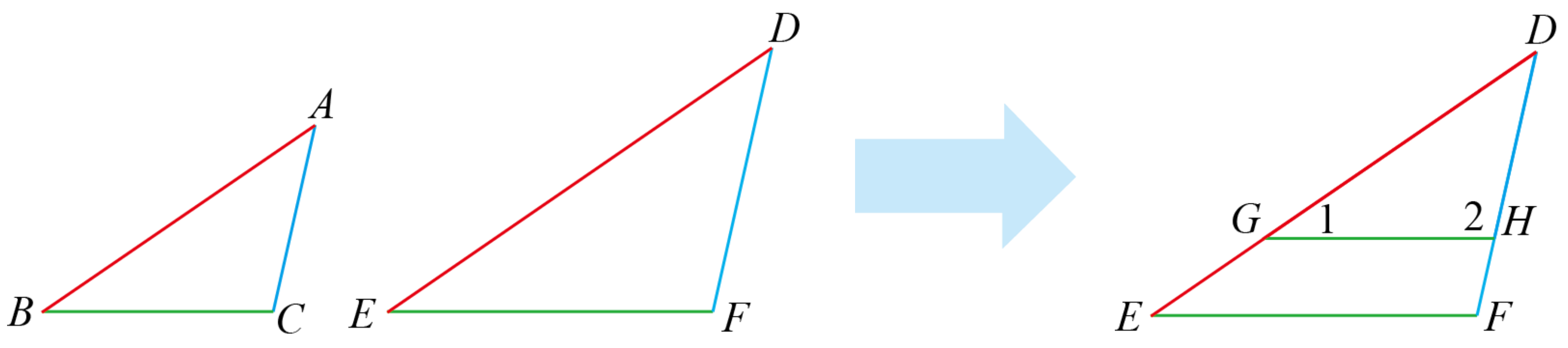
$\overline{BC}:25.6=10:20$

$\overline{BC}=12.8$。 #

解

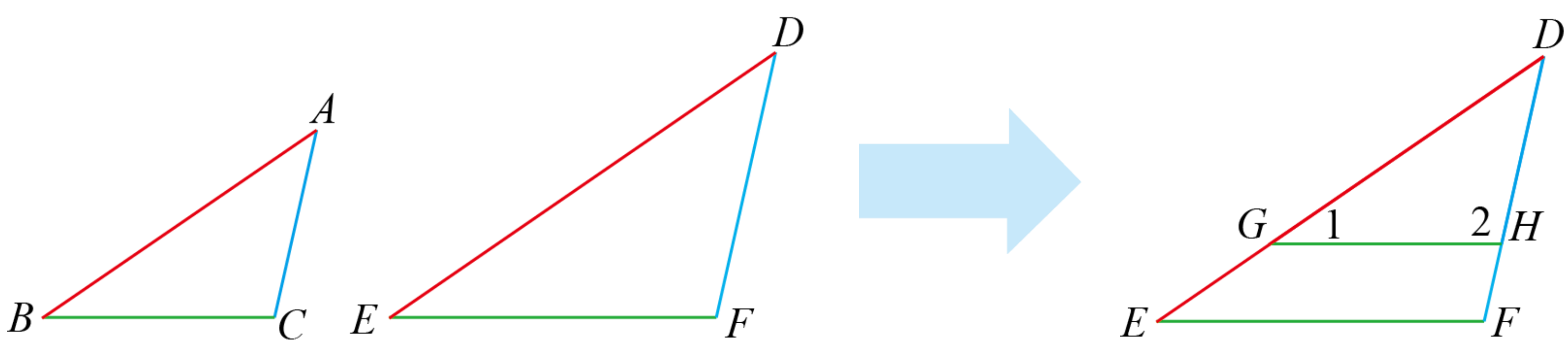
SSS 相似性質

如下圖，$\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中，$\overline{DE}>\overline{AB}$，若 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{DF}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$，則 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 是否相似？



在 $\overline{DE}$ 上取一點 G，使得 $\overline{DG}=\overline{AB}$；
在 $\overline{DF}$ 上取一點 H，使得 $\overline{DH}=\overline{AC}$。

因為 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$（已知），所以 $\dfrac{\overline{DG}}{\overline{DE}}=\dfrac{\overline{DH}}{\overline{DF}}$，
因此 $\overline{GH}\,//\,\overline{EF}$。



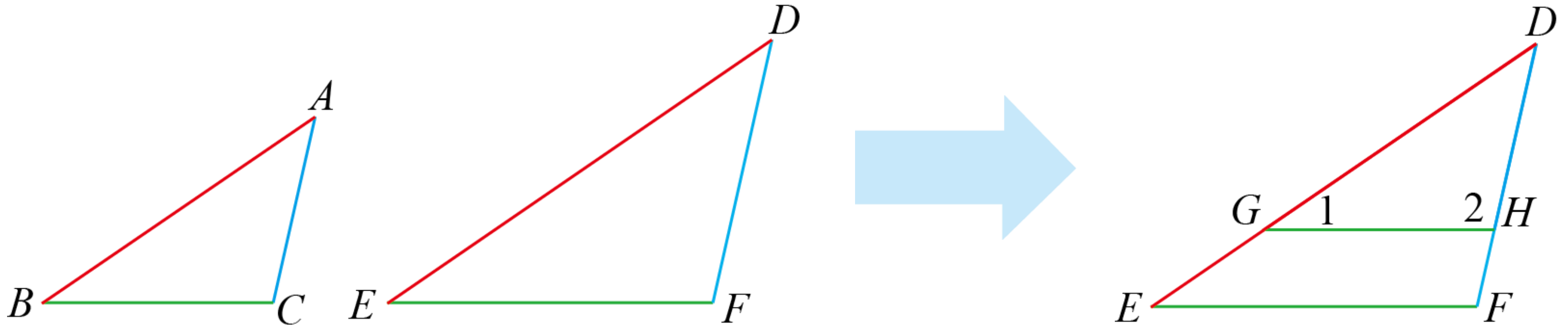
由此可得 $\angle 1=\angle E$，$\angle 2=\angle F$，

即 $\angle B=\angle 1=\angle E$，

$\angle C=\angle 2=\angle F$。

再由三角形內角和均為 180° 可得 $\angle A=\angle D$。

由上可知，$\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的對應角相等、對應邊成比例，所以 $\triangle ABC\sim\triangle DEF$。



因為 $\overline{GH} \,/\!/\, \overline{EF}$，

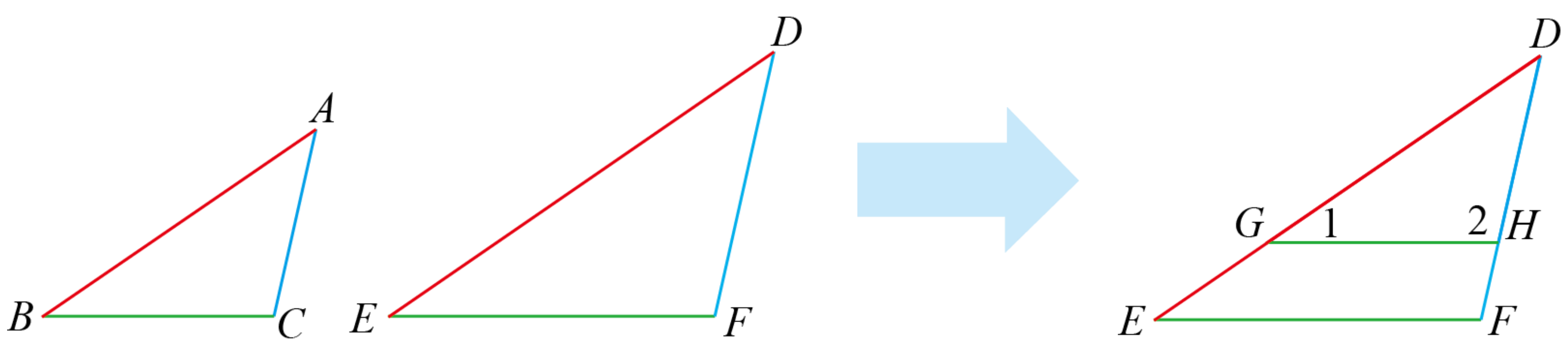
所以 $\dfrac{\overline{DG}}{\overline{DE}}=\dfrac{\overline{DH}}{\overline{DF}}=\dfrac{\overline{GH}}{\overline{EF}}$，

又 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{DF}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$（已知），

所以 $\overline{GH}=\overline{BC}$，

故 $\triangle ABC \cong \triangle DGH$（$SSS$ 全等性質），

因此 $\angle B=\angle 1$，$\angle C=\angle 2$。

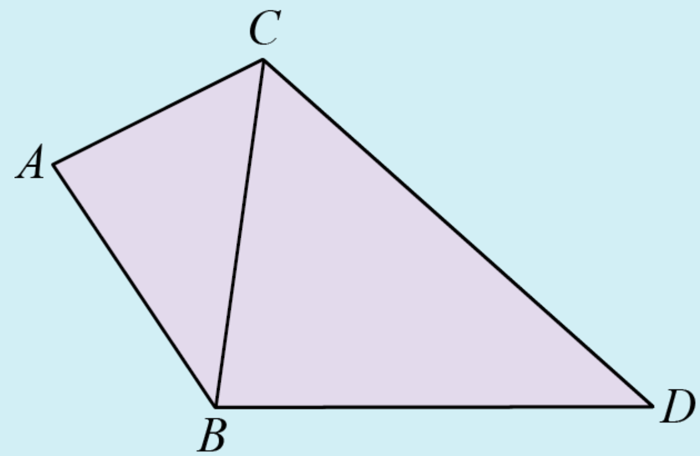


SSS 相似性質

若兩個三角形的三組對應邊成比例，則這兩個三角形相似，這個性質稱為 **SSS 相似性質**。

例 8 SSS 相似性質

如圖，$\overline{AB}=10$，$\overline{AC}=8$，$\overline{BC}=12$，$\overline{BD}=15$，$\overline{CD}=18$，回答下列問題：



(1) 為什麼$\triangle ABC \sim \triangle BDC$？

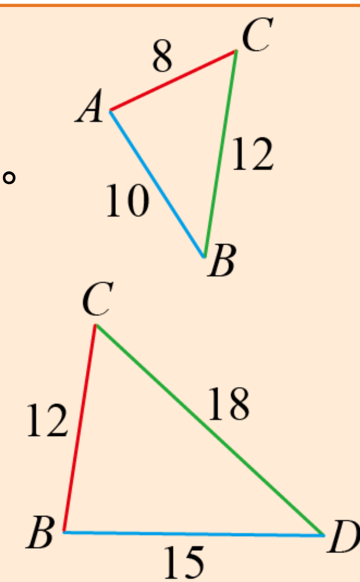
思路分析

可以分別從兩個三角形邊長的大小關係找到對應邊。

將$\triangle ABC$與$\triangle BDC$的三邊長分別由小到大排列，

$\triangle ABC$的邊長分別為$\overline{AC}=8$，$\overline{AB}=10$，$\overline{BC}=12$，

$\triangle BDC$的邊長分別為$\overline{BC}=12$，$\overline{BD}=15$，$\overline{CD}=18$。

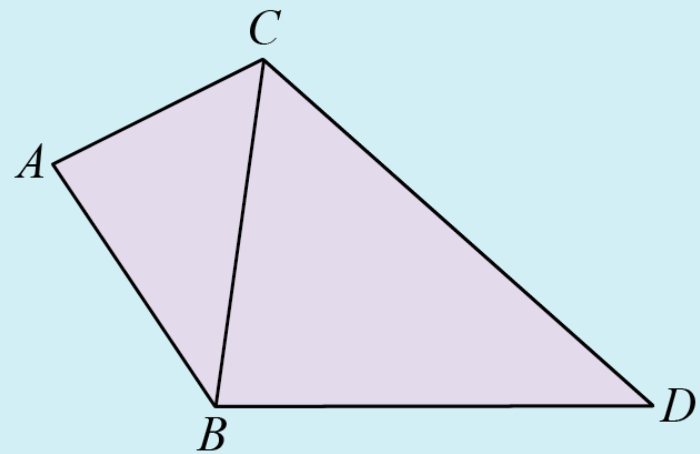


（接續下頁）

解

例 8 SSS 相似性質

如圖，$\overline{AB}=10$，$\overline{AC}=8$，$\overline{BC}=12$，$\overline{BD}=15$，$\overline{CD}=18$，回答下列問題：



(1) 為什麼△ABC~△BDC？

解 (1) 在△ABC 與△BDC 中，

$$\left.\begin{aligned}\because \overline{AC}:\overline{BC}&=8:12=2:3\\ \overline{AB}:\overline{BD}&=10:15=2:3\\ \overline{BC}:\overline{CD}&=12:18=2:3\end{aligned}\right\}\begin{aligned}\overline{AC}:\overline{BC}&=\overline{AB}:\overline{BD}\\&=\overline{BC}:\overline{CD}\end{aligned}$$

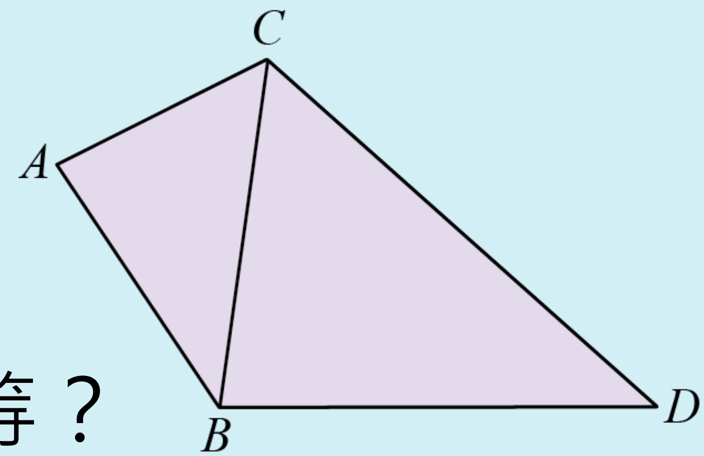
$\therefore$△ABC~△BDC（SSS 相似性質）。

#

翰林出版

例 8 SSS 相似性質

如圖，$\overline{AB}=10$，$\overline{AC}=8$，$\overline{BC}=12$，$\overline{BD}=15$，$\overline{CD}=18$，回答下列問題：



(2) $\angle D$ 與$\triangle ABC$的哪個角相等？

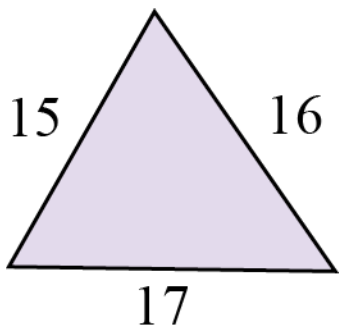
解 (2) $\because \triangle BDC \sim \triangle ABC$，

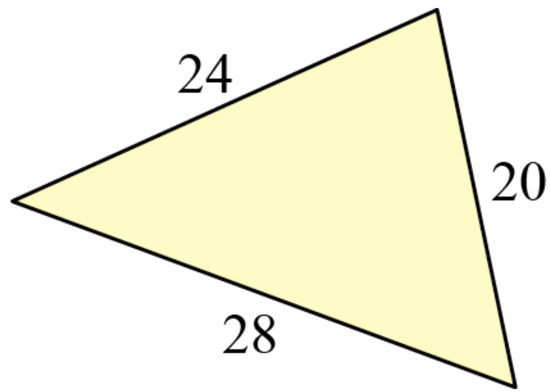
$\therefore \angle D = \angle ABC$。

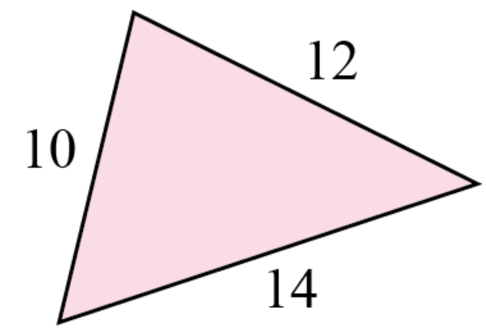
隨堂練習

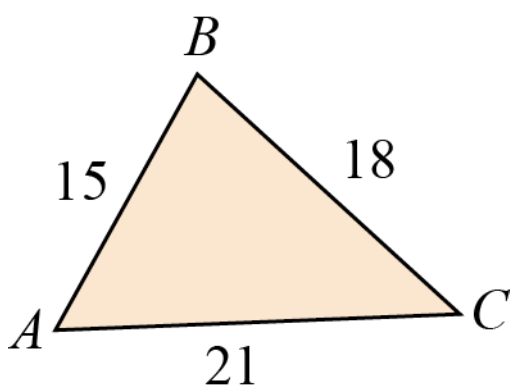
下列哪些三角形與$\triangle ABC$相似，在□中打「✓」。

(1) □　　(2) ☑　　(3) ☑









重點回顧

1 縮放的性質

(1) 線段縮放 k 倍後，縮放後的線段長為原線段長的 k 倍。

(2) 任意一個多邊形經過縮放 r 倍後的新多邊形，其對應角的角度不變，對應的邊長變成原來的 r 倍。

重點回顧

2 相似多邊形

(1) 如果兩個多邊形的對應角相等、對應邊成比例，就稱這兩個多邊形相似。

重點回顧

2 相似多邊形

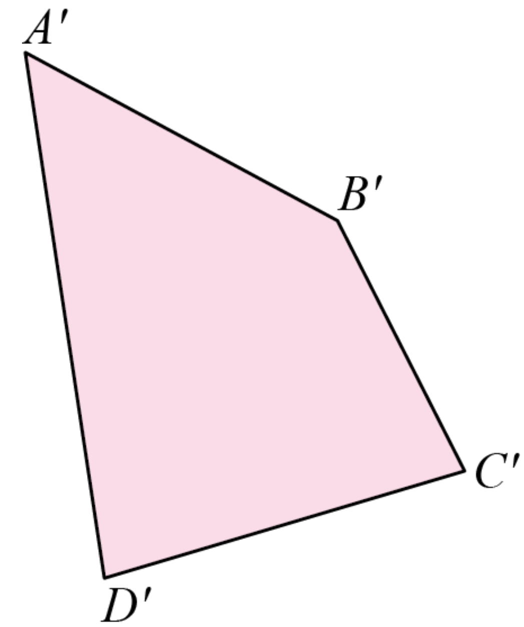
例 如圖，四邊形 $ABCD$ 和四邊形 $A'B'C'D'$，

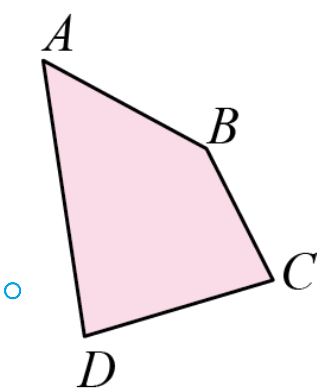
$\angle A' = \angle A$、$\angle B' = \angle B$、
$\angle C' = \angle C$、$\angle D' = \angle D$
（對應角相等），

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{D'A'}}{\overline{DA}}$$

（對應邊成比例），

就稱四邊形 $ABCD \sim$ 四邊形 $A'B'C'D'$。





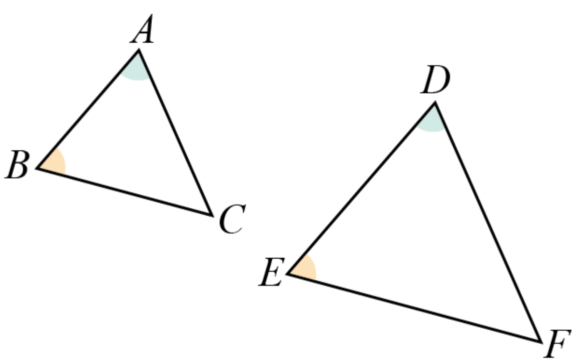
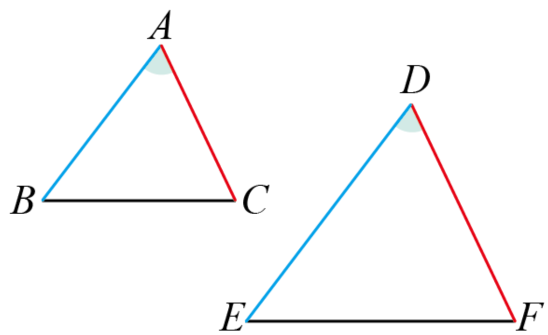
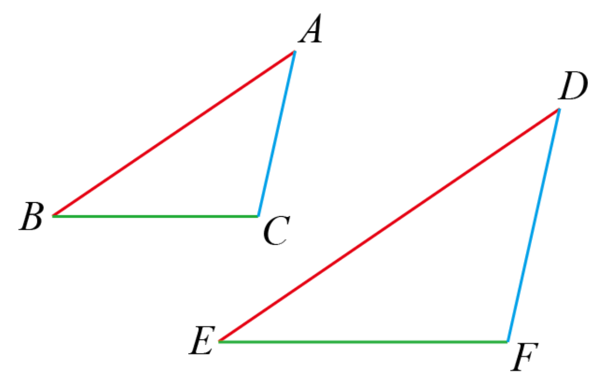
重點回顧

2 相似多邊形

(2) 若兩個多邊形相似，則其對應角相等，對應邊成比例。

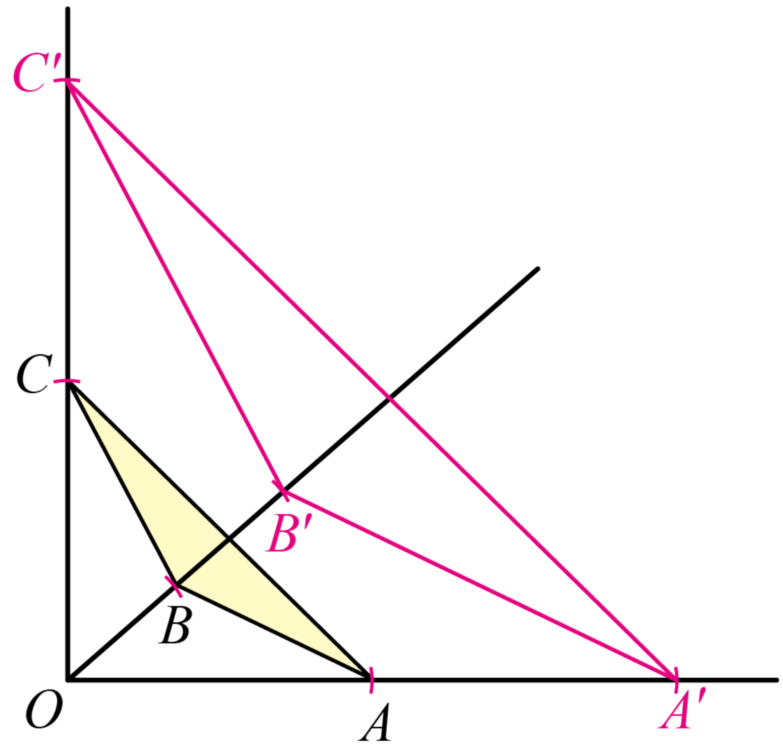
重點回顧

3 三角形的相似性質

AA 相似性質	SAS 相似性質	SSS 相似性質
		
$\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$	$\angle A=\angle D$，$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$	$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{EF}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$

自我評量

1 如圖，在 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$ 上分別取 A'、B'、C' 三點，使 $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$，且 $\overline{A'B'} = 2\overline{AB}$。(只要作圖，不必寫出做法)



解

自我評量

② 已知四邊形 $ABCD$～四邊形 $A'B'C'D'$ 中，A、B、C、D 對應頂點為 A'、B'、C'、D'，

(1) 若 $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CD}:\overline{DA}=1:3:4:2$，四邊形 $A'B'C'D'$ 周長為 50，求 $\overline{A'B'}$、$\overline{C'D'}$。

(1) $\because$ 四邊形 $ABCD$～四邊形 $A'B'C'D'$，

$$\therefore \overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CD}:\overline{DA}$$
$$=\overline{A'B'}:\overline{B'C'}:\overline{C'D'}:\overline{D'A'}$$
$$=1:3:4:2，$$

（接續下頁）

解

自我評量

2 已知四邊形 $ABCD$～四邊形 $A'B'C'D'$ 中，A、B、C、D 對應頂點為 A'、B'、C'、D'，

(1) 若 $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CD}:\overline{DA}=1:3:4:2$，四邊形 $A'B'C'D'$ 周長為 50，求 $\overline{A'B'}$、$\overline{C'D'}$。

故 $\overline{A'B'}=50\times\dfrac{1}{1+3+4+2}=5$，

$\overline{C'D'}=50\times\dfrac{4}{1+3+4+2}=20$。

答：(1) $\overline{A'B'}=5$，$\overline{C'D'}=20$。

自我評量

2 已知四邊形 $ABCD$～四邊形 $A'B'C'D'$ 中，A、B、C、D 對應頂點為 A'、B'、C'、D'，

(2) 若 $\angle A:\angle B:\angle C=2:5:3$，$\angle D=100°$，求 $\angle A'$ 及 $\angle B'$。

(2) 設 $\angle A=2r°$，$\angle B=5r°$，$\angle C=3r°$，$r\neq 0$，

$\because \angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360°$

$\therefore 2r+5r+3r+100=360$，$r=26$

又相似形的對應角相等，

故 $\angle A'=2\times 26°=52°$，$\angle B'=5\times 26°=130°$。

答：(2) $\angle A'=52°$，$\angle B'=130°$。#

解

自我評量

3 如圖，四邊形 $ABCD$ 為等腰梯形，$\overline{AD}$ // $\overline{BC}$，E、F 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{DC}$ 的中點，已知 $\overline{AD}=3$，$\overline{BC}=7$，回答下列問題：

(1) 四邊形 $AEFD$ 與四邊形 $EBCF$：

① 對應角是否相等？

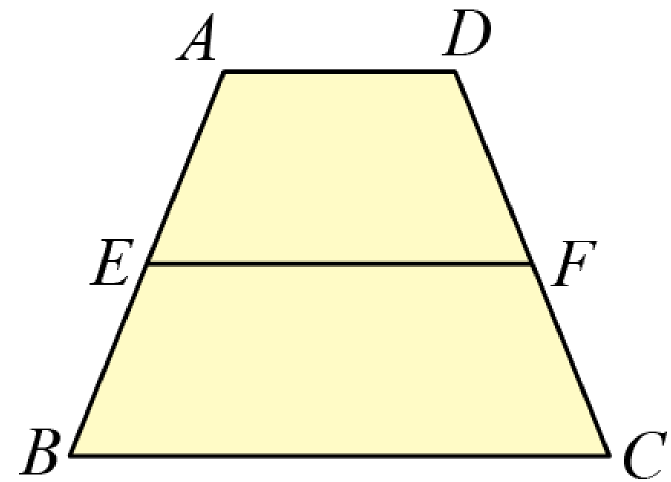
☑ 是　☐ 否

② 對應邊是否成比例？

☐ 是　☑ 否

③ 兩圖形是否相似？

☐ 是　☑ 否



自我評量

3 如圖，四邊形 $ABCD$ 為等腰梯形，$\overline{AD} // \overline{BC}$，$E$、$F$ 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{DC}$ 的中點，已知 $\overline{AD}=3$，$\overline{BC}=7$，回答下列問題：

(2) 四邊形 $AEFD$ 與四邊形 $ABCD$：

① 對應角是否相等？

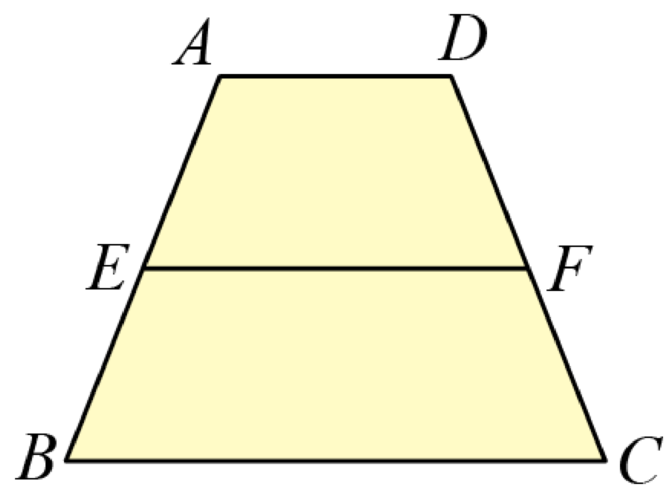
☑ 是　　☐ 否

② 對應邊是否成比例？

☐ 是　　☑ 否

③ 兩圖形是否相似？

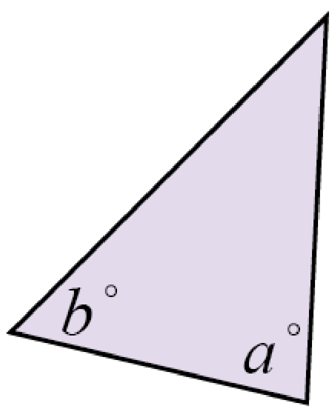
☐ 是　　☑ 否

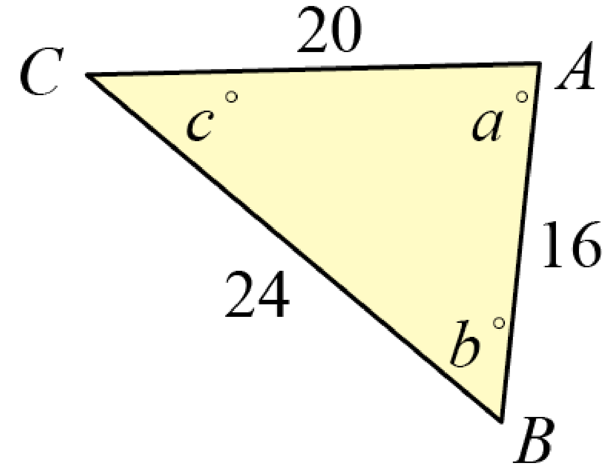


自我評量

4 下列哪些三角形與△ABC 相似，在□中打「✓」，並寫出所用的相似性質：

(1) ☑ __AA__ 相似性質





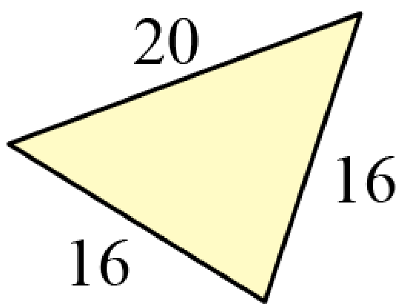
(接續下頁)

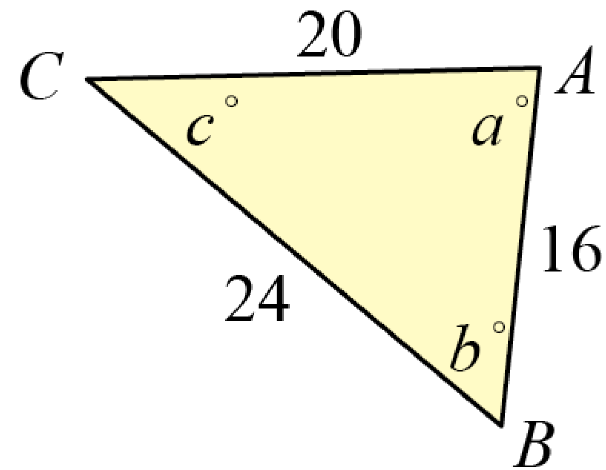
解

自我評量

4 下列哪些三角形與△ABC 相似，在□中打「✓」，並寫出所用的相似性質：

(2) □ ______相似性質



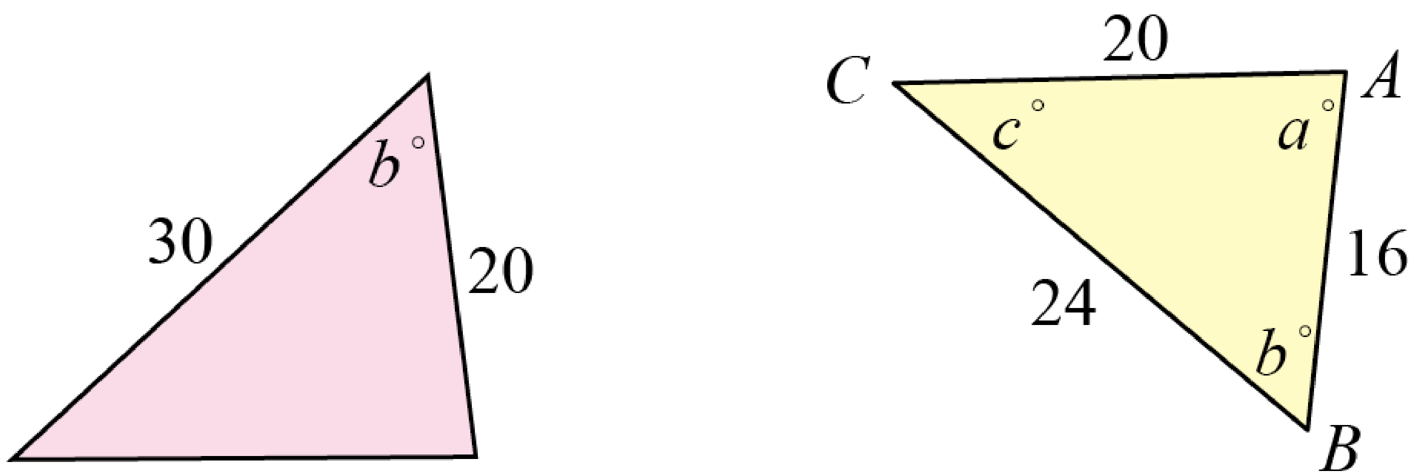


(接續下頁)

自我評量

4 下列哪些三角形與$\triangle ABC$ 相似，在□中打「✓」，並寫出所用的相似性質：

(3) ☑ ___*SAS*___相似性質

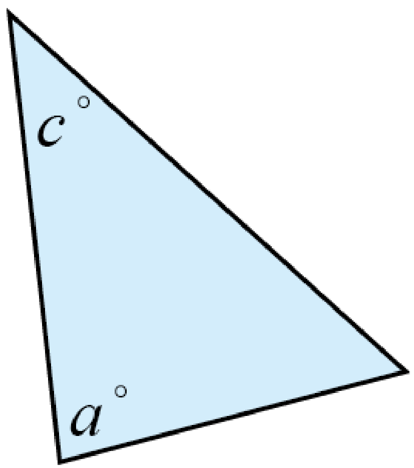


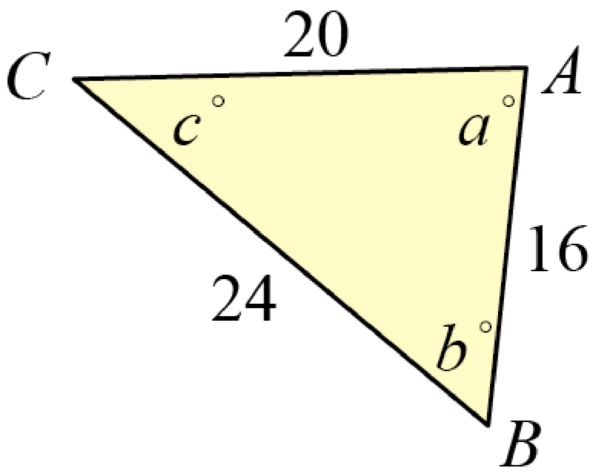
（接續下頁）

自我評量

4 下列哪些三角形與△ABC 相似，在□中打「✓」，並寫出所用的相似性質：

(4) ☑ ___AA___ 相似性質



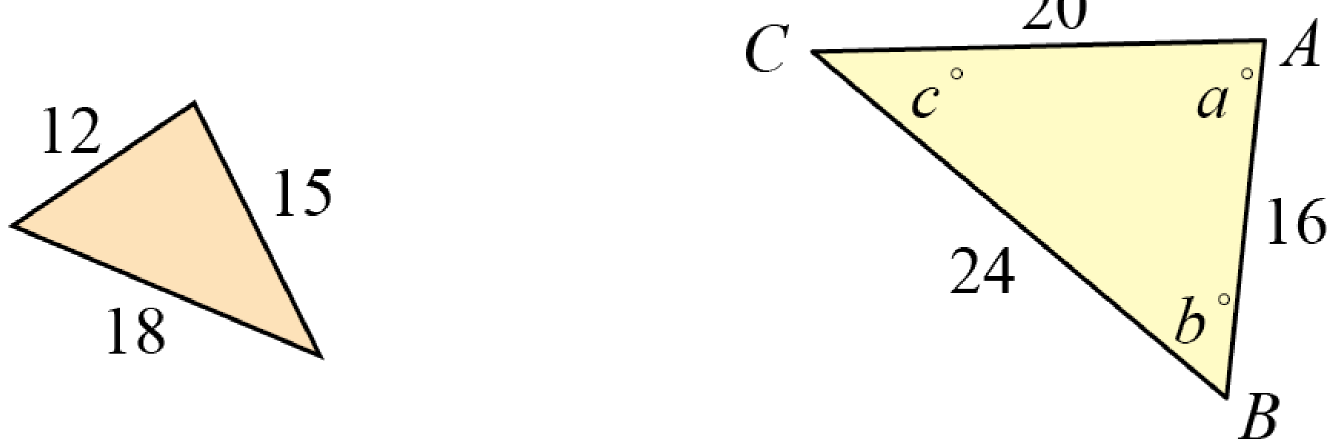


（接續下頁）

自我評量

4 下列哪些三角形與△ABC 相似，在□中打「✓」，並寫出所用的相似性質：

(5) ☑ ___SSS___相似性質



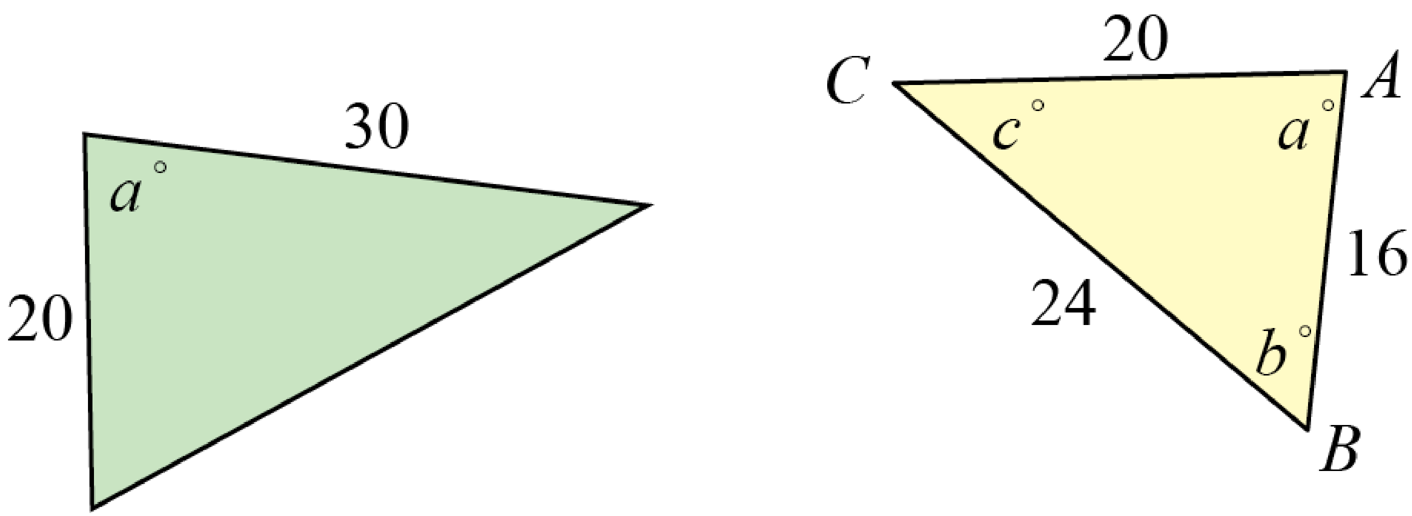
（接續下頁）

翰林出版

自我評量

4 下列哪些三角形與△ABC 相似，在□中打「✓」，並寫出所用的相似性質：

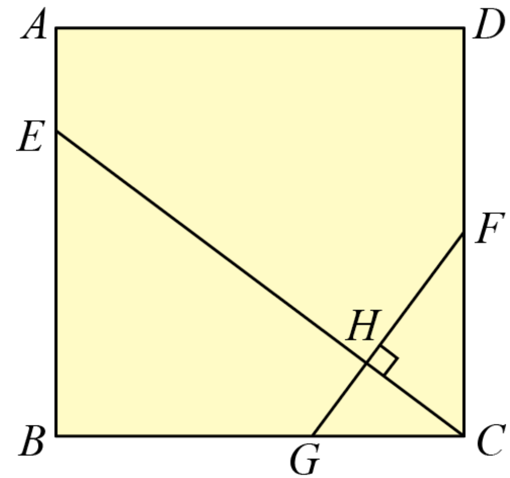
(6) □ ______相似性質



自我評量

5 如圖，四邊形 $ABCD$ 是邊長為 8 的正方形，E、F 分別在 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 上，$\overline{AE}=2$，且 F 是 $\overline{CD}$ 的中點，自 F 點作直線垂直 $\overline{EC}$ 且分別交 $\overline{EC}$、$\overline{BC}$ 於 H、G，回答下列問題：

(1) $\triangle EBC$ 與 $\triangle GCF$ 是否相似？為什麼？



(1) 在 $\triangle EBC$ 與 $\triangle GCF$ 中，

$\because$ 四邊形 $ABCD$ 為正方形，

$\therefore \angle B=\angle GCF=90^\circ$，

$\angle ECB+\angle BEC$

$=\angle ECB+\angle FGC$

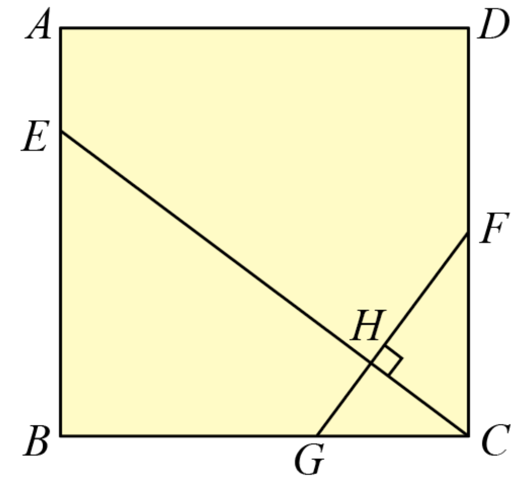
(接續下頁)

解

自我評量

5 如圖，四邊形 $ABCD$ 是邊長為 8 的正方形，E、F 分別在 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 上，$\overline{AE}=2$，且 F 是 $\overline{CD}$ 的中點，自 F 點作直線垂直 $\overline{EC}$ 且分別交 $\overline{EC}$、$\overline{BC}$ 於 H、G，回答下列問題：

(1) $\triangle EBC$ 與$\triangle GCF$ 是否相似？為什麼？



$\therefore \angle BEC=\angle FGC$

故$\triangle EBC\sim\triangle GCF$

(AA 相似性質)。

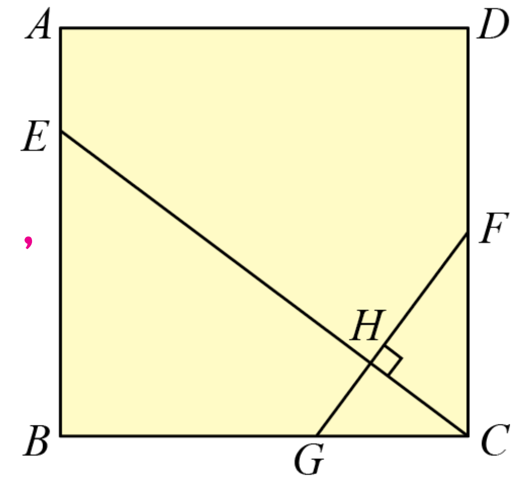
答：(1) 是。

解

自我評量

5 如圖，四邊形 $ABCD$ 是邊長為 8 的正方形，E、F 分別在 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 上，$\overline{AE}=2$，且 F 是 $\overline{CD}$ 的中點，自 F 點作直線垂直 $\overline{EC}$ 且分別交 $\overline{EC}$、$\overline{BC}$ 於 H、G，回答下列問題：

(2) 求 $\overline{BG}$。



(2) $\because \triangle EBC \sim \triangle GCF$

$\therefore \dfrac{\overline{EB}}{\overline{GC}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{CF}}$，$\dfrac{6}{\overline{GC}}=\dfrac{8}{4}$，$\overline{GC}=3$，

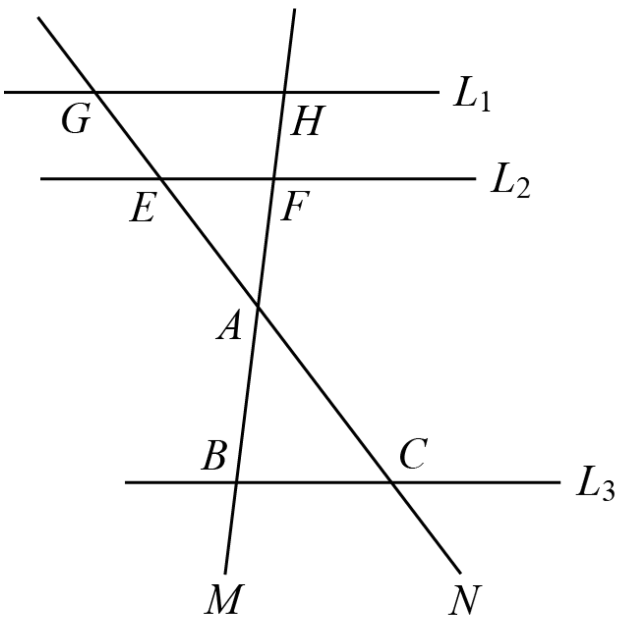
$\therefore \overline{BG}=8-3=5$。

答：(2) 5。

自我評量

6 如圖，L_1、L_2、L_3 皆為直線，$L_1 // L_2 // L_3$，直線 M、N 交於 A 點，$\overline{GE}=2$，$\overline{EA}=3$，$\overline{AC}=4$，$\overline{HA}=4$，求：

(1) $\overline{FA}$。



(1) $\because L_1 // L_2$

$\therefore \overline{EA}:\overline{GA}=\overline{FA}:\overline{HA}$

$3:(3+2)=\overline{FA}:4$

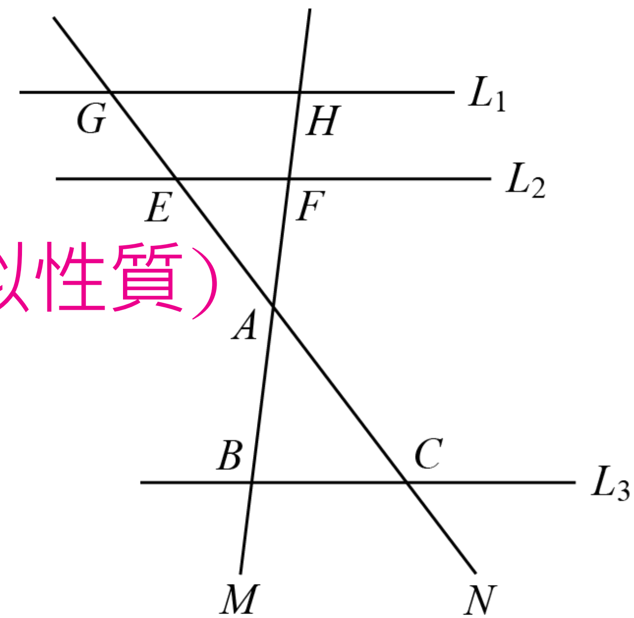
$\overline{FA}=2.4$。

答：(1) 2.4。

自我評量

6 如圖，L_1、L_2、L_3 皆為直線，$L_1 // L_2 // L_3$，直線 M、N 交於 A 點，$\overline{GE}=2$，$\overline{EA}=3$，$\overline{AC}=4$，$\overline{HA}=4$，求：

(2) 若 $\overline{EF}=2.1$，求 $\overline{BC}$。



(2) ∵ $L_2 // L_3$

∴ $\triangle AEF \sim \triangle ACB$（AA 相似性質）

故 $\overline{EA}:\overline{AC}=\overline{EF}:\overline{BC}$

$3:4=2.1:\overline{BC}$。

$\overline{BC}=2.8$。

答：(2) 2.8。

解